

FEUILLES D'EXERCICES D'ALGÈBRE COMMUTATIVE

JOÃO LOURENÇO

1.

2.

- (1) Déterminez trois nombres réels $a \in \mathbb{R}$, de sorte que le système d'équations linéaires suivant sur \mathbb{R} soit à solution unique, à plusieurs solutions ou sans solution :

$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ 4x + ay &= 2 \end{aligned}$$

- (2) Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 6x + 5y + 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 4 \\ 2x - 2y - 2z &= 8. \end{aligned}$$

Résolvez le système d'équations. Comment sont situés les trois plans dans l'espace les uns par rapport aux autres ?

- (3) Soit donné le système d'équations linéaires suivant sur les nombres réels \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

- (a) Résolvez le système d'équations par le calcul.
(b) Résolvez le système d'équations graphiquement, en considérant chaque équation séparément.
- (4) Résolvez à l'aide de l'algorithme de Gauss le système d'équations linéaires suivant sur les réels \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 9x_2 + 10x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 9x_2 + 12x_3 &= 10 \end{aligned}$$

- (5) Les vecteurs suivants engendrent-ils l'espace vectoriel \mathbb{Q}^3 ?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (6) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, considérons le sous-groupe H engendré par $(-5, 1)$ et $(1, -5)$. Montrez que G/H est cyclique. À quel groupe cyclique standard est-il isomorphe ?
- (7) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, considérons le sous-groupe H engendré par (a, b) et (c, d) .

- (a) Montrez que $\mathbb{Z}^{\oplus 2}/H$ est un groupe fini si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
- (b) Dans chacun des cas suivants, déterminez si G/H est cyclique. S'il est cyclique, déterminez à quel groupe cyclique standard il est isomorphe :
- $(a, b) = (3, 4), (c, d) = (6, 7)$
 - $(a, b) = (3, 4), (c, d) = (5, 7)$
- (8) Soient A, B des sous-groupes du groupe abélien C . On définit $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
- Montrez que $A + B$ est un sous-groupe de C .
 - Il existe un homomorphisme naturel $\varphi : A \oplus B \rightarrow A + B$, défini par $\varphi(a, b) = a + b$. Montrez que φ est surjectif, et que φ est un isomorphisme si et seulement si $A \cap B = 0$. En général, quel est $\ker(\varphi)$?
 - Supposons maintenant que A et B soient tous deux finis. Si $A \cap B$ est non nul, combien d'éléments le sous-groupe $A + B$ possède-t-il ?
- (9) (a) Supposons que A soit un groupe abélien. Montrez que l'ensemble $T = \{a \in A \mid \#\langle a \rangle < \infty\}$ est un sous-groupe. On l'appelle le « sous-groupe de torsion » de A .
- Montrez que dans le groupe quotient A/T , tout élément non nul est d'ordre infini. Ainsi A/T est « sans torsion ».
 - Soit A un groupe abélien. Expliquez comment définir un sous-groupe H tel que dans le quotient A/H , chaque élément $a + H$ satisfasse $3a + H = 0$. Existe-t-il un plus petit tel sous-groupe ?
- (10) Soient A et B des sous-groupes d'un groupe abélien C . Cet exercice étudie le sous-groupe $A + B$ et son quotient $(A + B)/B$.
- Montrez que tout élément de $(A + B)/B$ peut s'écrire sous la forme $a + B$ pour un certain $a \in A$.
 - Construisez un homomorphisme surjectif $A \rightarrow (A + B)/B$.
 - Prouvez qu'il existe un isomorphisme $A/(A \cap B) \rightarrow (A + B)/B$.

3.

- (1) Calculez le déterminant des matrices suivantes:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & (x_2 + \dots + x_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_1 + \dots + x_{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_2 \dots x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_1 \dots x_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (2) Calculez le polynôme caractéristique de la matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (3) Calculez le déterminant de la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

- (4) Prouvez que pour $n \geq 3$, les termes dans le développement d'un déterminant d'ordre n ne peuvent pas être tous positifs.
- (5) (a) Existe-t-il des matrices réelles A et B telles que $AB - BA = I$?
 (b) Prouvez que si $AB - BA = A$ avec matrices réelles, alors $\det(A) = 0$.
- (6) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$.
- (7) Prouvez que les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de ses éléments.
- (8) La somme des éléments de chaque ligne d'une matrice inversible A est égale à s . Prouvez que la somme des éléments de chaque ligne de A^{-1} est égale à $1/s$.
- (9) Soit $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, où A est une matrice d'ordre n . Prouvez que $f'(\lambda) = \sum_{i=1}^n \det(\lambda I - A_i)$, où A_i est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i -ème ligne et la i -ème colonne.

4.

- (1) Montrer que si un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $M_n(\mathbb{C})$ tout entier.
- (2) Montrer que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$, chaque puissance de $A - \lambda I$ et de $B - \lambda I$ ont le même rang.
- (3) Soit A une matrice vérifiant $(A - I)^2(A - 2I) = 0$. Calculer e^A sous la forme d'un polynôme en A .
- (4) Montrer que l'application $A \rightarrow Ae^A$ est surjective sur \mathbb{C} .
- (5) Soit u un endomorphisme de \mathbb{C}^n , dont les valeurs propres sont 0 et 1 ; on note K_0^i (resp. K_1^i) le noyau de u^i (resp. $(u - I)^i$) et soit d_0^i (resp. d_1^i) sa dimension.

On suppose que la suite (d_0^i) (resp. (d_1^i)) est égale à $(4, 7, 9, 10, 10, \dots)$ (resp. $(3, 4, 5, 5, \dots)$). Déterminer alors les invariants de similitudes de u .

- (6) Soit u un endomorphisme de $V = K^n$ dont on note χ_u et π_u respectivement les polynômes caractéristique et minimal :
- (a) χ_u est irréductible si et seulement si V n'a pas de sous-espace stable par u ;
 - (b) u est cyclique avec π_u une puissance d'un polynôme irréductible si et seulement si V est indécomposable sous u ;
- (7) Quels sont les endomorphismes u tels que tout sous-espace stable est de la forme $\text{Ker}(P(u))$ ou $\text{Im}(P(u))$ pour P un polynôme ?
- (8) Donner la liste de tous les sous-espaces stables d'une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^3 .