ESPACES PERFECTOÏDES

JOÃO LOURENÇO

RÉSUMÉ. Il s'agit des notes du cours de M2 spécialisé intitulé « Espaces perfectoïdes » que j'ai donné à Sophie Germain aux mois de mars et avril 2026. Nous avons commencé par expliquer quelques notions de géométrie rigide, avant de passer aux espaces adiques et de terminer par les espaces perfectoïdes.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction

1.1. **Corps locaux : topologies, géométrie, imperfection.** Les corps locaux sont devenus de plus en plus les protagonistes de la théorie des nombres moderne. Ils se présentent en deux familles : les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et leurs extensions finies d'une part, et les corps de séries de Laurent $\mathbb{F}_q(\!(t)\!)$ sur un corps fini d'autre part. Dans les deux cas, le corps est complet pour une valuation discrète non-archimédienne, localement compact, et son groupe de Galois absolu est l'objet d'étude de la théorie du corps de classes locale et de la correspondance de Langlands locale.

Pourtant, travailler géométriquement avec un corps local K soulève d'emblée des difficultés sans analogue dans le monde archimédieen ou algébrique. La topologie ultramétrique est totalement discontinue : toute boule ouverte est aussi fermée, et tout ouvert est réunion disjointe d'ouverts de même taille. On peut quantifier cette pathologie en observant qu'un espace localement modélé sur des ouverts de $\mathbb{Q}_p^n$ — analogue naïf d'une variété analytique — ne contient que des fonctions localement constantes. En particulier un tel espace n'admet aucun principe du maximum, aucune connexité intéressante, et les fonctions analytiques y sont triviales.

La deuxième difficulté est d'ordre algébrique et concerne la *caractéristique mixte*. Le corps $\mathbb{Q}_p$ est de caractéristique 0, mais son corps résiduel $\mathbb{F}_p$ est de caractéristique $p > 0$. En caractéristique égale, les anneaux de séries formelles $\mathbb{F}_q[\![t]\!]$ admettent le Frobenius $\varphi : x \mapsto x^p$ comme homomorphisme. En prenant la colimite de φ, on obtient l'anneau $\mathbb{F}_q[\![t^{1/p^\infty}]\!]$: cette procédure de *perfection* ne capture que la topologie des anneaux. Rien de tel en caractéristique mixte : l'élévation à la puissance p n'est pas surjective sur $\mathbb{Z}_p$ n'est plus un homomorphisme et donc la construction analogue serait beaucoup moins fonctorielle. Cependant, il était bien connu parmi les mathématiciens depuis les travaux de Fontaine–Wintenberger et Faltings que, en ramifiant arbitrairement un corps local K, il se comportait de plus en plus comme la perfection en caractéristique p. Dans ce cours, on verra comment résoudre simultanément toutes les difficultés énoncés.

1.2. **Géométrie rigide : algèbres de Tate, connexité, théorèmes fondamentaux.** La première résolution satisfaisante du problème de connexité a été proposée par Tate dans les années 1960, motivée par son étude des courbes elliptiques à réduction multiplicative déployée. L'idée directrice est de ne pas définir des ouverts arbitraires mais de munir $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid |x_i| \le 1\}$ d'une *topologie de Grothendieck* dont les recouvrements admissibles sont les recouvrements par des domaines *affinoïdes* qui peuvent être raffinés en recouvrements finis. La connexité topologique naïve est ainsi remplacée par une connexité au sens des faisceaux.

L'objet fondamental de la théorie est l'*algèbre de Tate*

$$T_n = K\langle X_1, \dots, X_n\rangle := \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}} a_i X^i \;\Big|\; |a_i| \to 0 \Big\}$$

munie de la norme de Gauss $\|\sum a_i X^i\| = \max_i |a_i|$. C'est le complété de $K[X_1, \dots, X_n]$ pour cette norme, et elle joue exactement le rôle de l'anneau des fonctions holomorphes sur le polydisque en géométrie analytique complexe. Les *algèbres affinoïdes* sont les quotients $A = T_n/I$, et les *espaces affinoïdes* sont les spectres maximaux $\mathrm{Sp}(A)$. On dispose d'une machinerie algébrique complète, fondée sur les théorèmes de Weierstrass (Theorem 3.7 and corollary 3.10) qui sont les analogues p-adiques de la préparation et de la division de Weierstrass classiques pour les séries convergentes. Ces théorèmes entraînent que T_n est noethérienne (Proposition 3.12), factorielle et satisfait le Nullstellensatz, et admettent une normalisation de Noether (Theorem 3.14) entièrement analogue au cas polynomial.

Les théorèmes centraux de la géométrie rigide sont les suivants. Tate démontre l'*acyclicité* du faisceau structurel (Theorems 6.1 and 6.4) : pour tout espace affinoïde $X = \mathrm{Sp}(A)$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$. C'est l'exact analogue du théorème de Cartan-B pour les domaines de Stein. Kiehl étend la théorie aux morphismes propres (Theorems 6.6 and 6.7) : les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par un morphisme propre sont cohérentes. On dispose aussi d'un théorème GAGA (Theorem 6.8) : pour un K-schéma projectif X, le foncteur d'analytification induit une équivalence $\mathrm{Coh}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}})$ compatible aux images directes supérieures. Enfin, la courbe de Tate $E_q = \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}/q^{\mathbb{Z}}$ réalise toutes les courbes elliptiques à réduction multiplicative déployée comme quotients analytiques, à la manière des courbes elliptiques complexes $\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$.

1.3. **Géométrie adique : valuations de rang supérieur, spectres, aciclicité.** La géométrie rigide de Tate, bien qu'élégante, a deux lacunes. D'une part, elle ne voit que les points classiques de rang 1, ignorant la « frontière de Shilov » des K-algèbres affinoïdes et par conséquent, plein de *points génériques* correspondant à des valuations provenant des extensions transcendentales de K, et pourtant essentiels pour génériquement décrire les morphismes et les faisceaux. D'autre part, la topologie de Grothendieck est difficile à maniement. Ces deux problèmes ont été résolus par Huber [Hub93, Hub94], dont la théorie des *espaces adiques* offre un cadre unifié englobant les espaces rigides, les schémas formels, et les espaces de Berkovich. Remarquons que la théorie de Berkovich, contemporaine de celle de Huber, résout le problème de connexité en complétant l'espace par les frontières de Shilov de toute localisation rationnelle, mais ne capture pas les valuations de rang supérieur.

La donnée de base est une *paire de Huber* (A, A^+) : un anneau de Tate complet A (un anneau topologique complet admettant un sous-anneau de définition ouvert borné A_0

et une pseudo-uniformisante $\varpi \in A_0$) muni d'un sous-anneau intégralement clos $A^+ \subset A^\circ = \{a \in A \mid a^n \text{ borné}\}$. Le *spectre adique* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est l'ensemble des valuations continues $v : A \to \Gamma \cup \{0\}$, pour des groupes totalement ordonnés Γ quelconques, avec $v(A^+) \leq 1$, muni d'une topologie spectrale. Les points de rang 1 correspondent aux valuations à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$ et retrouvent les points des espaces de Berkovich ; les points de rang supérieur codent des comportements de connexité et rendent l'espace topologiquement spectral et pas de Hausdorff (Theorem 8.22).

L'interprétation à la Raynaud relie les espaces adiques aux schémas formels : si A^+ est intègre, il existe une application de spécialisation propre $\mathrm{sp} : \mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Spec}(A^+/A^{\circ\circ})$. Plus précisément (Theorem 8.23), l'espace $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ s'identifie homéomorphiquement à la limite projective des fibres spéciales normalisées des éclatements admissibles de $\mathrm{Spec}(A^+)$, réalisant la construction de Raynaud–Berthelot dans ce cadre.

Le problème de l'*acyclicité* — le faisceau structurel $\mathcal{O}_X$ est-il un faisceau, et ses cohomologies supérieures s'annulent-elles sur les affinoïdes ? — n'a pas de réponse positive en général : Buzzard–Verberkmoes [BV18] exhibent des contre-exemples lorsque l'anneau est seulement uniforme. Cependant, pour les paires *stablement uniformes* (celles pour lesquelles toute localisation rationnelle reste uniforme), le théorème de Buzzard–Verberkmoes (Theorem 10.7) garantit l'acyclicité complète. Sa preuve suit la stratégie de Tate pour les algèbres affinoïdes : vérification directe pour les recouvrements de Laurent binaires, puis remontée par des suites spectrales de Čech.

1.4. **Espaces perfectoïdes, débasculement, courbe de Fargues–Fontaine.** Les espaces perfectoïdes, introduits par Scholze [Sch12] en 2012, sont la solution définitive au problème de l'imperfection en caractéristique mixte. L'idée est de forcer la surjectivité du Frobenius en le demandant directement dans la définition.

Un *anneau perfectoïde* est un anneau de Tate complet A qui est uniforme (i.e. A° est borné dans A) et dont le Frobenius $\Phi : A^\circ/p \to A^\circ/p$ est surjectif, autrement dit tel qu'on peut extraire des racines p-ièmes modulo p. L'exemple archétypal en caractéristique 0 est $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})^\wedge$, le complété de $\mathbb{Q}_p$ auquel on a adjoint toutes les racines p^n-ièmes de p ; en caractéristique p, ce sont exactement les $\mathbb{F}_q$-algèbres de Tate parfaites. Tout anneau perfectoïde A admet un *basculé* $A^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} A^\circ$, qui est un anneau perfectoïde de caractéristique p — l'avatar algébrique de la correspondance de Fontaine–Wintenberger.

Le problème inverse, le *débasculement*, est plus subtil. Le morphisme de vecteurs de Witt $\theta : W(A^\flat) \to A$ est surjectif (Lemma 11.15), et son noyau est un idéal principal engendré par tout élément *distingué de degré* 1, c'est-à-dire tout $\xi = \sum_{n \geq 0} [a_n] p^n \in W(A^\circ)$ avec a_0 topologiquement nilpotent et a_1 inversible (Lemma 11.19). La classification des débasculés est l'un des résultats clés du cours : pour A un anneau perfectoïde de caractéristique p, les débasculés de A sont en bijection avec les diviseurs de Cartier distingués de degré 1 modulo les unités, soit l'ensemble $\mathrm{Div}^1(A)$, la bijection envoyant ξ sur $(W(A^\circ)/\xi)[[\varpi^\flat]^{-1}]$ (Theorem 11.20). La catégorie Perfd des paires perfectoïdes est alors équivalente à une catégorie fibrée Div^1 au-dessus de la catégorie Perf des paires perfectoïdes en caractéristique p (Corollary 11.21). On en déduit les théorèmes fondamentaux :

- **Équivalence de basculement** (Corollary 11.22) : pour A perfectoïde, $(-)^\flat$ induit une équivalence $\mathrm{Perfd}_A \simeq \mathrm{Perf}_{A^\flat}$.

— **Faisceau perfectoïde** (Theorem 11.25) : pour X un espace perfectoïde, tout ouvert rationnel $\mathcal{O}_X(U)$ est encore perfectoïde, X est stablement uniforme et $\mathcal{O}_X$ est acyclique.
— **Invariance des recouvrements finis étales** (Theorem 11.27) : l'équivalence de basculement s'étend en une équivalence $X_{\text{fét}} \simeq X^\flat_{\text{fét}}$ des sites étales finis.

La *courbe de Fargues–Fontaine* est la structure géométrique qui surgit naturellement de toute cette théorie. Pour $S = \operatorname{Spa}(R, R^+)$ un espace perfectoïde affinoïde au-dessus de $\mathbb{F}_q$, on construit d'abord

$$\mathcal{Y}_S = \operatorname{Spa} W(R^+) \setminus V([\varpi]),$$

un espace adique sur $\mathbb{Z}_p$ portant une action libre et totalement discontinue du Frobenius φ. La courbe adique relative est

$$X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}, \quad Y_S = \mathcal{Y}_S \setminus V(p),$$

et on lui associe une courbe algébrique $X_S^{\text{alg}} = \operatorname{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(n))$. Pour $S = \operatorname{Spa} C$ avec C un corps perfectoïde algébriquement clos, la courbe X_C est un anneau de Dedekind complet dont les idéaux maximaux correspondent aux débasculés de C, retrouvant ainsi Div^1 comme espace de modules de la courbe. Les fibrés en droites $\mathcal{O}_{X_S}(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ sont définis par les isocristaux simples de pente λ selon Dieudonné–Manin ; le fibré $\mathcal{O}_{X_S}(1)$ est relié à la théorie de Lubin–Tate, et ses sections globales paramètrent les débasculés de S (Corollary 12.14).

Les théorèmes principaux du cours sur la courbe de Fargues–Fontaine sont les suivants.
— **Amplitude et annulation de Serre** (Theorem 12.16) : pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_S, il existe n_0 tel que $\mathcal{E}(n)$ soit globalement engendré et que $H^1(X_S, \mathcal{E}(n)) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.
— **Théorème GAGA** (Theorem 12.16 et suite) : le foncteur de tiré en arrière $\mathrm{Fib}(X_S^{\text{alg}}) \to \mathrm{Fib}(X_S)$ est une équivalence compatible à la cohomologie.
— **Classification des fibrés vectoriels sur un point géométrique** (Theorem 12.20) : pour C algébriquement clos, tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_C est isomorphe à $\bigoplus_i \mathcal{O}_{X_C}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. En particulier, $\mathrm{Pic}(X_C) \cong \mathbb{Z}$.
— **Semi-continuité et scindage des familles** (Theorem 12.23) : pour un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang constant sur X_S, le polygone de Harder–Narasimhan est semi-continu supérieurement ; si ce polygone est constant, la filtration de Harder–Narasimhan scinde pro-étale localement sur S en $\bigoplus_\lambda \mathcal{O}_{X_S}(\lambda)^{n_\lambda}$.
— **Systèmes locaux et fibrés vectoriels** (Corollary 12.24) : la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux pro-étales sur S est équivalente à la catégorie des fibrés vectoriels sur X_S de polygone de Harder–Narasimhan identiquement nul.

Ces résultats constituent les fondations d'un programme profond, la *géométrisation de la correspondance de Langlands locale*, esquissée par Fargues [Far18] et développée en collaboration avec Scholze [FS24]. Le point de départ est le théorème de Fargues que les G-torseurs sur X_C (pour un groupe réductif G) sont paramétrés par l'ensemble $B(G)$ des σ-classes de conjugaison de Kottwitz, exactement comme dans la théorie des isocristaux à G-structure. Cela suggère que la correspondance de Langlands locale pour $\mathbb{Q}_p$ devrait s'interpréter comme la correspondance de Langlands *géométrique* — au sens de Beilinson–Drinfeld — sur la courbe X_C. Le champ Bun_G des G-torseurs sur X_S, vu comme foncteur sur les espaces perfectoïdes, joue le rôle de l'analogue p-adique du champ des G-fibrés sur une courbe sur $\mathbb{F}_q$. Les représentations lisses de $G(\mathbb{Q}_p)$ s'encodent comme des faisceaux ℓ-adiques sur Bun_G, et la correspondance de Langlands se reformule comme une équivalence entre la catégorie dérivée de ces faisceau et la catégorie dérivée des faisceaux cohérents sur le champ des L-paramètres, qui généralise les représentations du groupe de Weil de $\mathbb{Q}_p$. Le présent cours, en établissant les théorèmes sur les fibrés vectoriels sur X_S, fournit une introduction aux outils géométriques nécessaires pour aborder ce programme.

1.5. **Plan du cours.** La section 2 rappelle les propriétés élémentaires des corps non-archimédiens : valuations, complétions, corps locaux, résidus. Les sections 3–5 développent les algèbres de Tate, les algèbres affinoïdes et la théorie classique des espaces rigides, en démontrant les théorèmes de Weierstrass. La section 6 est un aperçu de la suite de la théorie rigide, énonçant l'acyclicité de Tate, les théorèmes de Kiehl et le GAGA rigide sans preuves. La section 7 introduit la notion générale d'anneau de Tate et les paires de Huber de Tate. La section 8 développe la théorie du spectre adique de Huber, la spectralité et la limite d'éclatements. La section 9 traite le spectre adique de la boule unité fermée comme exemple fondamental. La section 10 établit le théorème de Buzzard–Verberkmoes sur l'acyclicité pour les paires stablement uniformes. La section 11 développe la théorie des anneaux et espaces perfectoïdes, le basculement, le débasculement via Div^1 et les théorèmes d'équivalence. La section 12 construit la courbe de Fargues–Fontaine et établit les théorèmes d'amplitude, de GAGA, de classification des fibrés vectoriels et de semi-continuité du polygone de Harder–Narasimhan.

1.6. **Remerciements.** Il y a dix ans, j'ai commencé à apprendre ces notions à Bonn entre 2016 et 2017. Pour ce faire, j'ai bénéficié d'un excellent cours de Yichiao Tian, de nombreuses discussions avec mon directeur de mémoire de master Peter Scholze, d'un atelier à Oberwolfach organisé par Rebecca Bellovin, Brian Conrad, Kiran Kedlaya et Jared Weinstein, ainsi que de l'école d'hiver d'Arizona qui proposait des mini-cours de Bhargav Bhatt, Ana Caraiani, et à nouveau Kiran Kedlaya et Jared Weinstein. Parmi les collègues qui m'ont accompagné à l'époque et qui ont contribué à mon apprentissage (et je prie ceux dont j'ai omis les noms de m'excuser), citons Andrea Dotto, Ben Heuer, Linus Hamann, Andreas Piepsch, Mafalda Santos, Joseph Stahl et Matthias Weirich.

Lors de la préparation de ce cours, je me suis appuyé sur diverses sources, certaines lues il y a une dizaine d'années, d'autres parues plus récemment. Le texte que j'ai rédigé doit donc beaucoup aux sources suivantes : en géométrie rigide, le livre de Siegfried Bosch, les notes de Ben Heuer et celles de Yichao Tian ; en géométrie adique, les notes de Brian Conrad, Laurent Fargues, Sophie Morel, Torsten Wedhorn et de Jared Weinstein ; en géométrie perfectoïde, les notes de Bhargav Bhatt, de Laurent Fargues, de Ben Heuer, et de Kiran Kedlaya. J'ai aussi profité des questions et commentaires de tous ceux qui ont suivi le cours, notamment de Marine Casares, Tomás Fernández, Pierre-Louis Frabel, Alexandre Kenigswald, Nathan Partouche, Zheng Wang. Je remercie Tomás Fernández d'avoir organisé les travaux dirigés informels.

2. Corps non-archimédiens

Définition 2.1. Un corps non-archimédien K est un corps muni d'une valuation non triviale à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application $|\cdot|: K \to \mathbb{R}$ telle que :

(1) $|a| \geq 0$, et $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$;
(2) $|ab| = |a||b|$;
(3) $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$
(4) il existe $a \in K^\times$ tel que $|a| < 1$.

Deux valuations $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ sur K sont dites équivalentes si elles diffèrent par une puissance réelle positive.

Toute valuation $|\cdot|$ confère à K une structure d'espace métrique via $d(a,b) = |a-b|$, et nous notons son complété par $\hat{K}$. La topologie de K ne dépend pas du choix de $|\cdot|$, et il en va de même pour $\hat{K}$.

Exemple 2.2. Pour chaque nombre premier p, on peut définir une valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ par $|p^n \frac{a}{b}| = p^{-n}$ pour a, b, p premiers deux à deux. Rappelons que le théorème d'Ostrowski classifie les valuations de $\mathbb{Q}$ à équivalence près. Le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à $|\cdot|_p$ est noté $\mathbb{Q}_p$. Tout élément de $\mathbb{Q}_p$ peut s'exprimer de manière unique comme $x = \sum_{n \gg -\infty}^{\infty} a_n p^n$ avec $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Exemple 2.3. Pour tout corps k, il existe une valuation non triviale naturelle sur $K = k(z)$. Plus précisément, pour $f(z) = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n z^n \in K$ avec $a_{n_0} \neq 0$, on pose $|f(z)| = \rho^{n_0}$ pour un certain nombre réel ρ tel que $0 < \rho < 1$. Le complété de K par rapport à $|\cdot|$ est égal au corps des séries de Laurent $k(\!(z)\!)$.

Dans ce cours, nous nous concentrerons sur les corps non-archimédiens complets K. Alors l'ensemble $\mathcal{O}_K = \{x \in K\colon |x| \leq 1\}$ est un sous-anneau de valuation de K, appelé anneau des entiers de K, et l'ensemble $\mathfrak{m}_K = \{x \in K\colon |x| < 1\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$. Le quotient $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ est appelé corps résiduel de K. On dit que K (resp. $\mathcal{O}_K$) est un corps (resp. anneau) de valuation discrète si $|K^\times|$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^\times$.

Proposition 2.4. *Le corps valué K est discret si et seulement si $\mathfrak{m}_K$ est un idéal principal. Dans ce cas, chaque élément de $K^\times$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \pi^n u$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathcal{O}_K^\times$ et $\pi \in \mathfrak{m}_K \setminus \mathfrak{m}_K^2$. De plus, tout $\mathcal{O}_K$-sous-module non trivial de K est de la forme $\pi^n \mathcal{O}_K$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $|K^\times|$ soit discret. Alors l'ensemble $|K^\times| \cap (0,1)$ possède un élément maximal, noté ρ. Soit $\pi \in \mathfrak{m}_K$ tel que $|\pi| = \rho$. Nous allons montrer que $\mathfrak{m}_K = (\pi)$. En effet, pour tout $x \in \mathfrak{m}_K$, on a $|x| \leq \rho = |\pi|$, donc $|x/\pi| \leq 1$, c'est-à-dire $x/\pi \in \mathcal{O}_K$ et $x \in (\pi)$.

Réciproquement, si $\mathfrak{m}_K = (\pi)$ est principal, nous affirmons que $|K^\times| = |\pi|^{\mathbb{Z}}$. Tout d'abord, montrons que $|K^\times| \cap]|\pi|, |\pi|^{-1}[= \{1\}$. En effet, s'il existe $|x| \in |K^\times|$ tel que $|\pi| < |x| < 1$, alors $x/\pi \in \mathfrak{m}_K$ mais $x \notin (\pi)$. De même, s'il existe $|y| \in |K^\times|$ tel que $1 < |y| < |\pi|^{-1}$, alors $y^{-1} \in \mathfrak{m}_K$ mais $y^{-1} \notin (\pi)$. Cela montre déjà que $|K^\times|$ est discret. Puisque tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}^\times$ est de la forme $\gamma^{\mathbb{Z}}$, nous concluons que $|K^\times| = |\pi|^{\mathbb{Z}}$.

Supposons maintenant que K soit discret, de sorte que $|K^\times| = |\pi|^{\mathbb{Z}}$. Par conséquent, pour tout $x \in K^\times$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x| = |\pi|^n$, d'où $x = \pi^n \cdot u$, avec $u = \frac{x}{\pi^n} \in \mathcal{O}_K^\times$. L'assertion restante est laissée en exercice. □

Proposition 2.5. *Si L/K est une extension finie, alors $|\cdot|$ sur K s'étend de manière unique en une valuation sur L via $|x| = |N_{L/K}(x)|^{1/[L:K]}$. De plus, L est complet pour cette valuation, et, si K est un corps de valuation discrète, alors L l'est aussi.*

Démonstration. Comme vous m'avez embêté avec des questions après la fin du cours (merci de le faire autant que possible !), j'écris la preuve avec quelques détails. On considère $\mathcal{O}_L = \{x \in L \colon |x| \leq 1\}$ et on affirme qu'il s'agit de la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans L. Si c'était le cas, alors on pourrait vérifier que notre application $|\cdot|$ définit une norme sur L, car la seule propriété à vérifier (après renormalisation) est que $\mathcal{O}_L$ soit stable par la somme, ce qui découle du fait que la clôture intégrale préserve les anneaux.

Pour démontrer l'assertion, rappelons que le lemme de Hensel affirme qu'une factorisation à facteurs premiers l'un à l'autre de la réduction de $f \in O_K[X]$ modulo $\mathfrak{m}_K$ se relève à O_K. En effet, cela reste valide même pour les corps non discrètement valués, car la première factorisation est valide modulo un certain $\pi \in \mathfrak{m}_K$ (pour des raisons triviales) et la méthode de Newton va continuer avec ce π fixé. Or, le lemme d'Hensel entraîne que la norme de Gauss (voir ci-dessous) du polynôme minimal f de x est égal à $\max\{1, |a_0|\}$. Donc si $x \in \mathcal{O}_L$, on voit que son polynôme minimal f appartient à $\mathcal{O}_K$, ce qui entraîne notre affirmation sur $\mathcal{O}_L$.

Enfin, on traite l'unicité. Une autre extension $|\cdot|'$ ne serait pas équivalente, donc on trouverait $x \in \mathcal{O}_L$ dont la norme $|x| > 1$. Mais on peut voir grâce au polynôme minimal $f \in \mathcal{O}_K[X]$ que $1 \in x^{-1}\mathcal{O}_K[x^{-1}]$, mais ce dernier sous-ensemble a norme strictement inférieur à 1. On en déduit l'unicité. Pour voir que L est complet, on invoque la pleine fidélité du foncteur d'oubli de K-espaces de Banach fini vers K-modules. □

Par conséquent, la valeur absolue sur K s'étend de manière unique à une clôture algébrique $\bar{K}$. Cependant, notons que $\bar{K}$ n'est en général pas complet pour cette valeur absolue, mais son complété est encore algébriquement clos, grâce au lemme de Krasner. Par exemple, soit $\mathbb{C}_p$ le complété de $\bar{\mathbb{Q}}_p$. On peut alors montrer que l'élément :

$$x = \sum_{(n,p)=1} \zeta_n p^n \in \mathbb{C}_p, \tag{2.1}$$

ne peut pas être algébrique sur $\mathbb{Q}_p$. Par définition de l'extension, l'action de Galois de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $\bar{K}$ préserve la valuation, elle s'étend donc en une action sur le complété C de $\bar{K}$.

Sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, il existe une théorie aboutie de la géométrie analytique réelle ou complexe. Il est naturel de se demander s'il existe une théorie similaire de la géométrie analytique sur $\mathbb{Q}_p$, ou plus généralement sur les corps non-archimédiens. Notez que les questions de convergence sont bien moins problématiques dans le cas non-archimédien : en effet, pour que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ avec $a_n \in K$ converge, il faut et il suffit que $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour $x \in K$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, on définit le disque ouvert et la boule fermée :

$$D(x,r) = \{y \in K \colon |y - x| < r\}, \quad B(x,r) = \{y \in K \colon |y - x| \leq r\}. \tag{2.2}$$

autour de x de rayon r. Notons que ces ensembles sont tous les deux ouverts et fermés (clopen), ce qui diffère considérablement du cas archimédien. Par définition, $\{D(x,r)\}_{r>0}$

et $\{B(x,r)\}_{r>0}$ forment un système fondamental de voisinages ouverts-fermés de x. Il faut faire attention que la boule fermée ne sera compacte que lorsque le corps résiduel k soit fini.

Corollaire 2.6. *La topologie sur K est totalement discontinue, c'est-à-dire que la composante connexe de chaque point de K est réduite au point lui-même.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble de K contenant au moins deux éléments distincts x, y, muni de la topologie induite. Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $r < |x-y|$. Alors $D(x,r)$ et son complémentaire sont des ouverts séparant x et y, donc A ne peut pas être connexe. □

Remarque 2.7. Autres faits curieux en géométrie ultramétrique qui cassent notre intuition : tous les triangles sont isosceles ; et les boules fermées se contiennent ou sont disjointes.

3. Algèbres de Tate

Le fait que l'espace topologique K soit totalement discontinu pose des problèmes pour faire de la géométrie p-adique, car on voudrait que les fonctions sur la boule fermée forment une K-algèbre sans idempotents non triviaux, or notre espace présente trop de composantes connexes. La solution de Tate consiste à étudier les fonctions souhaitées et à ignorer les recouvrements « pathologiques » : cela donne lieu à la théorie des espaces rigides. La solution de Huber consiste à rajouter des points à $B(x,r)$ pour qu'il devienne connexe : c'est l'origine de la théorie des espaces adiques.

3.1. **Notions basiques.** Considérons la boule unité fermée de dimension d pour un entier $d \geq 1$:

$$\mathbb{B}^d(\bar{K}) = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \bar{K}^d ; |x| := \max_{1 \leq i \leq d}(|x_i|) \leq 1\}. \tag{3.1}$$

Nous introduisons ainsi l'algèbre :

$$T_d = \{f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}} a_i X^i \in K[\![X_1, \ldots, X_d]\!] \colon a_i \to 0 \text{ quand } i \to \infty\}, \tag{3.2}$$

appelée *algèbre de Tate à d variables* à coefficients dans K, qui est l'algèbre des fonctions convergentes sur $\mathbb{B}^d(\bar{K})$. On note $T_d^\circ \subset T_d$ la $\mathcal{O}_K$-sous-algèbre des séries dont les coefficients sont tous dans $\mathcal{O}_K$. Elle contient un idéal $T_d^{\circ\circ}$ des séries à coefficients dans $\mathfrak{m}_K$ dont le quotient $T_n^\circ / T_n^{\circ\circ}$ s'identifie canoniquement à $k[X_1, \ldots, X_n]$. On note red l'homomorphisme $T_n \to k[X_1, \ldots, X_n]$ correspondant.

Il existe une valuation naturelle, appelée norme de Gauss, sur T_d définie par $\|f(X)\| := \max_{i \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}} |a_i|$. Elle est bien définie car les coefficients tendent vers 0. Nous munissons T_d de la topologie définie par cette norme.

Proposition 3.1. *La norme de Gauss est multiplicative.*

Démonstration. Soient f, g des éléments de T_n supposés avoir $\|f\| = \|g\| = 1$ après renormalisation. Le noyau ker(red) de l'application de réduction est l'idéal composé des éléments h tels que $\|h\| < 1$. Puisque $k[X_1, \ldots, X_n]$ est un domaine d'intégrité, l'idéal ker(red) est premier. □

Lemme 3.2. *Soit* $f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_i X^i \in T_n$*. Alors,* f *est une unité dans* T_n *si et seulement si on a* $|a_0| > |a_i|$ *pour tout* $i \neq 0$*.*

Démonstration. La multiplicativité de la norme entraîne que si f est une unité avec $\|f\| = 1$, alors $\|f^{-1}\| = 1$. En particulier, cela nous donne une unité de $T_n(\mathcal{O}_K) = T_n^\circ$, donc $\mathrm{red}(f) \in k^\times \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ est une constante inversible. □

Proposition 3.3 (Principe du maximum)**.** *Pour tout* $f(X) \in T_n$*, il existe un point* $x \in \mathbb{B}^n(\bar{K})$ *tel que* $|f(x)| = \|f\|$*.*

Démonstration. Calculons $|f(x)| \leq |\sum_i c_i x^i| \leq \max_i |c_i||x|^i \leq \max_i |c_i| = \|f\|$. Réciproquement, si $\|f\| = 1$, alors $\mathrm{red}(f) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ne s'annule pas sur $\bar{k}$, donc il faut juste prendre un relèvement à $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ d'un tel point du corps résiduel de $\bar{K}$. □

Sur les corps non-archimédiens, on parle aussi des espaces de Banach.

Définition 3.4.
(1) Un espace de Banach E sur un corps non-archimédien K est un K-espace vectoriel muni d'une structure d'espace métrique complet à l'aide d'une norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant :
- $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- $\|ax\| = |a|\|x\|$ pour $a \in K$ et $x \in E$;
- $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

(2) Une K-algèbre de Banach A est une K-algèbre munie d'une structure de K-espace de Banach telle que $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ pour tous $x, y \in A$.

Proposition 3.5. *L'algèbre de Tate* T_d *est une* K*-algèbre de Banach pour la norme de Gauss.*

Démonstration. On a déjà vu la multiplicativité de la norme de Gauss et les restants axiomes sont encore plus faciles. Pour la complétude, soit $(f_j)_{j \geq 0}$ une suite de Cauchy, avec $f_i = \sum_i a_{ij} T^i$. Pour chaque indice i fixé, la suite des coefficients $(a_{ij})_{j \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans K. Comme K est complet, ces suites convergent vers des limites a_i. Alors, $f = \sum_i a_i X^i$, qui est bien convergente sur la boule fermée, est la limite des f_j. □

3.2. **Préparation de Weierstrass.** Un résultat fondamental en géométrie analytique complexe est le théorème de préparation de Weierstrass que relie les germes de fonctions holomorphes et leurs lieux d'annulation à ceux des polynômes.

Nous discutons maintenant de la technique du théorème de préparation de Weierstrass dans le contexte ultramétrique.

Définition 3.6. Un élément

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i X_n^i \in T_n = T_{n-1}\langle X_n \rangle, \text{ avec } g_i \in T_{n-1} \tag{3.3}$$

est dit distingué d'ordre $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ si $\|g\| = \|g_s\|$, g_s est une unité dans T_{n-1} et $\|g_i\| < \|g_s\|$ pour tout $i > s$.

Notons que cette notion dépend du choix de variable X_n ! Pour raccourcir nos énoncés, on va toujours noter $R\langle X\rangle_I$ pour $I \subset \mathbb{Z}_{>0}$ le sous-R-module topologiquement engendré par X^i pour tout $i \in I$. Lorsque cela est clair dans le contexte, on remplace I par des inégalités correspondantes comme $\leq i$, $< i$, $\geq i$, $> i$, etc.

Théorème 3.7 (Division de Weierstrass, [BGR84, Theorem 5.2.1])**.** *Soit $g \in T_n$ un élément distingué d'ordre s. Pour tout $f \in T_n$, il existent uniques $q \in T_n$ et $r \in T_{n,<s}$ tels que $f = qg + r$ et $\|f\| = \max\{\|q\|\|g\|, \|r\|\}$.*

On fera la preuve en plusieurs étapes.

Lemme 3.8. *L'égalité des normes $\|f\| = \max\{\|q\|\|g\|, \|r\|\}$ dans la division de Weierstrass est automatique.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que q et r sont tous deux non nuls avec $\|g\| = 1$ et $\max(\|q\|\|g\|, \|r\|) = 1$. Clairement, nous avons $\|f\| \leq \max(\|q\|\|g\|, \|r\|) = 1$. Supposons que cette inégalité soit stricte. Alors, nous avons $\mathrm{red}(qg + r) = \mathrm{red}(f) = 0$ et au moins l'un des termes $\mathrm{red}(q)$ et $\mathrm{red}(r)$ doit être non nul. Cela contredit la division euclidienne dans $k[X_1, \ldots, X_n]$. □

L'étape suivante est de construire une approximation à la division de Weierstrass.

Lemme 3.9. *Soit $g \in T_n$ un élément distingué de norme 1 et écrivons $g = g' + g''$ avec $g' \in T_{n,\leq s}$ et $g'' \in T_{n,>s}$. Soit $\varepsilon = \|g''\| < 1$. Alors, pour tout $f \in T_n$, il existent $q, f_1 \in T_n$ et $r \in T_{n,<s}$ tels que $f = qg + r + f_1$, $\|f_1\| \leq \varepsilon\|f\|$ et $\|q\|, \|r\| \leq \|f\|$.*

Démonstration. Écrivons $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j X_n^j$ avec $f_j \in T_{n-1}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (qui a priori n'a aucun rapport avec s !) tel que, pour la décomposition $f = f' + f''$ avec $f' \in T_{n,\leq k}$ et $f'' \in T_{n,>k}$, alors $\|f''\| < \varepsilon\|f\|$. Par division euclidienne dans $K[X_1, \ldots, X_n]$, il existe $q \in T_n$ et $r \in T_{n,<s}$ avec $f' = qg' + r$. Posons $f_1 = -qg'' + f''$, de sorte que l'on ait :

$$f = f' + f'' = qg' + r + f_1 + qg'' = qg + r + f_1, \tag{3.4}$$

c'est-à-dire que la 1ère première condition est satisfaite. Pour voir que la 2ème condition est remplie, notons que $\|g''\|$ est égal à ε, donc nous avons :

$$\|f_1\| \leq \max(\|qg''\|, \|f''\|) \leq \varepsilon\|f\|, \tag{3.5}$$

comme souhaité. La dernière condition se démontre comme dans le Lemma 3.8. □

Démonstration. Le Lemma 3.8 montre que si l'on se donne q et r comme dans l'énoncé du théorème, alors nous avons $\|f\| = \max(\|q\|\|g\|, \|r\|)$. Montrons maintenant l'unicité de q et r. Supposons que q' et r' satisfassent $f = gq' + r'$. Alors, nous avons $0 = g(q - q') + (r - r')$. Par le lemme de la norme appliqué à 0, nous avons $\max(\|q - q'\|, \|r - r'\|) = 0$, et par conséquent $q - q' = r - r' = 0$.

Enfin, nous montrons que les éléments q et r tels que définis dans l'énoncé du théorème existent. On peut supposer que $\|g\| = 1$. Comme dans l'énoncé du Lemma 3.9, écrivons $g = g' + g''$ et posons $\varepsilon = \|g''\|$. Appliquant la division de Weierstrass approximée par récurrence, pour chaque $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, nous trouvons $f_i, q_i \in T_n$ et $r_i \in T_{n,<s}$ tels que $f_i = q_i g + r_i + f_{i+1}$ avec $\|q_i\|, \|r_i\| \leq \varepsilon^i\|f\|$ et $\|f_{i+1}\| \leq \varepsilon^{i+1}\|f\|$. On vérifie aisément que les séries $q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i$ et $r = \sum_{i=0}^{\infty} r_i$ donnent la division de Weierstrass cherchée. □

Corollaire 3.10 (Préparation de Weierstrass, [BGR84, Corollary 5.2.3])**.** *Soit $g \in T_n$ un élément distingué d'ordre s. Il existe un unique polynôme unitaire $\omega \in T_{n,\leq s} \setminus T_{n,<s}$ et une unité $e \in T_n$ tels que $g = e\omega$.*

Démonstration. Supposons $\|g\| = 1$ et appliquons le théorème de division de Weierstrass à $f = X_n^s$ pour trouver $q \in T_n$ et $r \in T_{n,<s}$ tels qu'on ait $X_n^s = gq + r$ et $\max(\|qg\|, \|r\|) = 1$, ce qui implique en particulier que $\|q\|, \|r\| \leq 1$. Posons $\omega = X_n^s - r$, de sorte que $qg = \omega$. Nous avons $\|\omega\| = 1$ et $\omega \in T_{n,\leq s}$ est distingué d'ordre s.

Nous affirmons que q est une unité dans T_n. Pour le voir, notons d'abord que ω, q et g appartiennent tous à T_n°, et considérons leurs réductions respectives $k[X_1, \dots, X_n]$. Puisque $\mathrm{red}(g)$ et $\mathrm{red}(\omega)$ sont distingués d'ordre s et possèdent tous deux une norme de Gauss égale à 1, ils sont de degré s en X_n. Ainsi, l'élément $\mathrm{red}(q)$ appartient à $k[X_1, \dots, X_n]^\times = k^\times$. Cela implique que q appartient à $T_n^\times$. L'unicité découle immédiatement. $\square$

En particulier, le lieu d'annulation de $g \in T_n$ qui soit distingué est donné par celui d'un polynôme $\omega \in T_{n-1}[X_n]$, ce qui est assez remarquable. Cependant, ni tout élément de T_n est distingué lorsque $n > 1$, même par rapport à aucune variable, comme le montre par exemple le produit $X_1 \dots X_n$ de toutes les variables. Néanmoins, il peut y être amené par un automorphisme convenable de T_n.

Lemme 3.11. *Étant donné $f \in T_n$, il existe un automorphisme continu σ de T_n préservant la norme de Gauss de la forme*

$$\sigma(X_i) = \begin{cases} X_i + X_n^{m_i}, & \text{si } i \neq n, \\ X_n & \text{si } i = n, \end{cases} \tag{3.6}$$

pour certains entiers $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, tel que $\sigma(f)$ soit distingué.

Démonstration. Il est clair que les formules ci-dessus induisent un automorphisme de $\mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_n]$, donc en passant au complété et localisant en K, il s'étend en un automorphisme continu de T_n. Nous pouvons supposer que $\|f\| = 1$. Soit $\mathrm{red}(f) = \sum_{i \in S} \mathrm{red}(a_i) X^i$ la réduction de f, où S est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Nous pouvons supposer que $\mathrm{red}(a_i) \neq 0$ pour tout $i \in S$. Notons m le vecteur $(m_1, \dots, m_{n-1}, 1)$ et $\langle m, i \rangle$ produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$. La réduction de l'action de σ sur f est donnée par :

$$\mathrm{red}(\sigma(f)) = \sum_{i \in S} \mathrm{red}(a_\nu) X_n^{\langle m, i \rangle} + \mathrm{red}(g). \tag{3.7}$$

Nous choisissons m suffisamment dominant (c'est-à-dire, $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_{n-1} \gg 1$) de sorte que les $\langle m, i \rangle$ soient tous distincts pour $i \in S$ et que le degré en X_n dans $\mathrm{red}(g)$ soit strictement inférieur à $s := \max_{i \in S}\{\langle m, i \rangle\}$. Soit $i_0 \in S$ l'indice pour lequel le maximum ci-dessus est atteint ; nous obtenons alors :

$$\mathrm{red}(\sigma(f)) = \mathrm{red}(a_{i_0}) X_n^s + \mathrm{red}(g) \tag{3.8}$$

avec $g \in k[X_1, \dots, X_n]_{<s}$. Le coefficient de X_n^s de $\sigma(f)$ a pour réduction $\mathrm{red}(a_{i_0})$, et est donc une unité dans T_{n-1} d'après le Lemme 3.2, tandis que les coefficients de X_n^i pour tout $i > s$ ont une réduction nulle. Par conséquent, $\sigma(f)$ est distingué. $\square$

3.3. **Applications de la préparation de Weierstrass.** Maintenant, on va recueillir les fruits de notre travail, en démontrant plusieurs propriétés favorables des algèbres de Tate.

Proposition 3.12 ([BGR84, Theorem 5.2.6])**.** *L'algèbre de Tate T_n est noethérienne.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence. Le cas de base $n = 0$ est trivial. Pour l'étape de récurrence, supposons que T_{n-1} est noethérienne. Soit $\mathfrak{a} \subseteq T_n$ un idéal quelconque. Choisissons $g \in \mathfrak{a}$. Par le lemme précédent, nous pouvons supposer que g est distingué d'ordre k. Par le théorème de division de Weierstrass, le quotient $T_n/(g)$ est un T_{n-1}-module fini engendré par $1, X_n, \ldots, X_n^{k-1}$. En particulier, il est noethérien et comme $\mathfrak{a}$ contient g, alors cet idéal est finiment engendré. □

Proposition 3.13. *T_n est factoriel et donc normal.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Le passage de T_{n-1} à $T_{n-1}[X_n]$ est assuré par le lemme de Gauss. Pour un élément général de l'algèbre de Tate, on se ramène au cas d'un polynôme de Weierstrass grâce au théorème de préparation, et l'on conclut par l'isomorphisme $T_{n-1}[X_n]/(P) \simeq T_n/(P)$. □

Il aurait été possible de démontrer cela en termes de bases orthonormales, mais on a préféré de le déduire du théorème de préparation de Weierstrass.

Théorème 3.14 (Normalisation de Noether, [BGR84, Theorem 6.1.2])**.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de T_n et B son quotient. Alors il existe un entier d et un morphisme fini injectif $T_d \to B$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal nul (0), le résultat est clair. Sinon, soit g un élément non nul de $\mathfrak{a}$. Après appliquer un automorphisme convenable de T_n, nous pouvons supposer que g est distingué. Par le théorème de la division de Weierstrass, l'application composée $T_{n-1} \to T_n \to T_n/(g) \to T_n/\mathfrak{a}$ est finie. Soit $\mathfrak{b}$ son noyau. Si $\mathfrak{b}$ est nul, nous avons terminé. Sinon, nous pouvons répéter l'argument précédent avec $\mathfrak{b}$ à la place de $\mathfrak{a}$. En continuant ainsi par récurrence, nous trouverons un entier d tel qu'il existe une application finie et injective $T_d \to T_n/\mathfrak{a}$ après un nombre fini d'étapes, puisque T_0 est simplement le corps K. □

Lemme 3.15. *Soit $\mathfrak{m} \subseteq T_n$ un idéal maximal. Alors, l'algèbre $T_n/\mathfrak{m}$ est une extension finie de corps de K.*

Démonstration. Par le Theorem 3.14, il existe un entier d et une application finie injective $T_d \to T_n/\mathfrak{m}$. Puisque $T_n/\mathfrak{m}$ est un corps, l'algèbre T_d doit également être un corps. Par conséquent, $d = 0$ et $T_d = K$. □

Soit $\mathbb{B}^n(\bar{K})$ l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{K}^n : |x_i| \leq 1\}$. Pour $x \in \mathbb{B}^n(\bar{K})$, notons $\mathfrak{m}_x$ le noyau de l'application naturelle d'évaluation $T_n \to \bar{K}$.

Proposition 3.16 ([BGR84, Theorem 7.1.2])**.** *Il existe une bijection naturelle*

$$\mathbb{B}^n(\bar{K})/\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{Sp}(T_n), \tag{3.9}$$

où $\mathrm{Sp}(T_n)$ *désigne le spectre maximal.*

Démonstration. L'envoi $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ définit une application $\phi : \mathbb{B}^n(\bar{K}) \to \mathrm{Sp}(T_n)$. Nous affirmons que l'application ϕ est surjective. Soit $\mathfrak{m} \subseteq T_n$ un idéal maximal. D'après le lemme précédent, nous pouvons trouver un plongement K-linéaire $T_n/\mathfrak{m} \hookrightarrow \bar{K}$ et on considère la composée $\varphi : T_n \to T_n/\mathfrak{m} \to \bar{K}$. Elle est continue et bornée essentiellement grâce au théorème de l'application ouverte de Banach. Cela entraîne que $|\varphi(X_i)| \leq 1$, donc on identifie φ avec l'évaluation au point $x = (\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n))$ de la boule $\mathbb{B}^n(\bar{K})$ Cela achève la preuve que ϕ est surjective. Pour l'injectivité, il faut juste utiliser l'action du groupe de Galois pour identifier les plongements $T_n/\mathfrak{m} \hookrightarrow \bar{K}$. □

Proposition 3.17 ([BGR84, Proposition 7.1.1])**.** *L'anneau T_n est de Jacobson.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ est l'intersection des idéaux maximaux le contenant. Pour $\mathfrak{p} = 0$, si f est dans l'intersection de tous les idéaux maximaux, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{B}^n(\bar{K})$, donc $\|f\| = 0$ par le principe du maximum, d'où $f = 0$.

Considérons maintenant le cas général. D'après le théorème 3.14, il existe un homomorphisme injectif fini $T_d \to B = T_n/\mathfrak{p}$. Il s'agit de montrer que le radical de Jacobson $\mathfrak{q}$ de B s'annule. Comme les injections finies induisent des surjections entre les spectres maximaux, on en déduit $\mathfrak{q} \cap T_d = 0$. Soit $0 \neq f \in \mathfrak{q}$, alors f est intégral sur T_d, c'est-à-dire qu'il satisfait une équation polynomiale unitaire :

$$f^r + a_1 f^{r-1} + \dots a_{r-1} f + a_r = 0, \tag{3.10}$$

avec $a_i \in T_d$ et on peut supposer $a_r \neq 0$ car B est un domaine d'intégrité. Mais a_r appartient alors à l'intersection nulle $\mathfrak{q} \cap T_d$, donnant une contradiction. □

Comme certains étudiants m'avaient prévenu après le cours, il y avait une lacune à remplir pour contrôler les normes résiduelles des K-algèbres affinoïdes dans la suite, notamment on devrait vérifier que tout idéal n'est pas seulement fermé, mais aussi strictement fermé. Pour le déduire de la division de Weierstrass, il faudra énoncer ceci pour les réseaux des T_n-modules libres finis.

Proposition 3.18. *Soit T_d^n muni du produit des normes de Gauss. Alors, tout sous-module $M \subset T_d^n$ est strictement fermé, c'est-à-dire, pour tout $f \in T_d^n$ il existe un $m_0 \in M$ tel que $\|f + m_0\| = \min\{\|f + m\| \colon m \in M\}$. En particulier, M est fermé.*

Démonstration. Pour la dernière partie, observons que si f appartient à l'adhérence de M, alors l'infimum de $\{\|f + m\| \colon m \in M\}$ s'annule. Or, ceci est atteint sur un $m_0 \in M$, donc $f = -m_0 \in M$ et, en particulier, M est fermé.

La preuve de l'existence d'un minimum sera faite par induction sur d. On sait que la catégorie des espaces K-vectoriels finis normés est semisimple, c'est-à-dire, chaque sous-espace admet un complémentaire orthogonal. En particulier, on trouve $N \subset T_d^n$ disjoint de M tel que la somme $M \otimes N \subset T_d^n$ soit un réseau muni du produit des normes. Comme M est strictement fermé dans la somme, on peut se ramener toujours à un M qui est un réseau.

Vu que T_d est noethérien et $M \subset T_d^n$ est supposé un réseau, on trouve $g \in T_d$ non nul tel que $gT_d^n \subset M$. Quitte à appliquer un homomorphisme convenable, on peut supposer g distingué d'ordre s. La division de Weierstrass entraîne que $gT_d^n \subset T_d^n$ est strictement fermé et, en particulier, la norme résiduelle sur le quotient $T_d^n/gT_d^n = T_{d-1}^{sn}$ s'identifie au produit des normes de Gauss sur chacun des facteurs. Par récurrence, on sait que le sous-T_{d-1}-module $M/gT_d^n \subset T_{d-1}^{sn}$ est strictement fermé et on voit aisément que cette propriété est stable par composition. □

4. Algèbres affinoïdes sur K

Soit K un corps valué complet non archimédien, comme d'habitude. Dans cette section, on va parler de la catégorie des K-algèbres topologiques qui sont de type fini au sens topologique. Elles s'appellent K-algèbres affinoïdes et on va étudier leurs normes et leurs $\mathcal{O}_K$-modèles entiers.

4.1. **Normes par surjection et par supremum.**

Définition 4.1. Une K-algèbre topologique A est appelée une *algèbre affinoïde* sur K s'il existe un homomorphisme d'algèbres surjectif $T_n \to A$. Elles engendre une sous-catégorie pleine de Alg_K notée AffAlg_K.

Parfois, on désigne les K-algèbres affinoïdes par K-algèbres topologiquement de type fini. D'après la Proposition 3.12 et la Proposition 3.17, on sait que toute K-algèbre affinoïde est noethérienne et de Jacobson, chacun de ses idéaux est fermé, et tout corps résiduel de chacun de ses idéaux maximaux est une extension finie de K. La propriété de Jacobson entraîne que, pour chaque morphisme $\varphi\colon A \to B$ dans AffAlg_K, le tiré en arrière par φ induise une application $\mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A)$.

Définition 4.2. Pour chaque surjection $\alpha\colon T_n \to A$, on munit A de la structure de K-algèbre de Banach donné par la norme quotient $\|\bar{f}\|_\alpha = \inf_{f\in\alpha^{-1}(\bar{f})} \|f\|$ pour tout $\bar{f} \in A$.

La norme $\|\cdot\|_\alpha$ dépend de la projection α. Cependant, nous verrons que différentes projections induisent des topologies équivalentes sur A.

Proposition 4.3 ([BGR84, Theorem 6.1.1])**.** *Soient $\alpha\colon T_n \to A$ et $\beta\colon T_m \to B$ deux surjections. Alors, tout homomorphisme $\varphi\colon A \to B$ de K-algèbres est continu par rapport aux topologies induites par les normes $\|\cdot\|_\alpha$ sur A, resp. $\|\cdot\|_\beta$ sur B.*

Démonstration. On ne traite que le cas où B est réduit. Par le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que pour un couple de suites $f_i \to f$ et $g_i = \varphi(f_i) \to g$ convergentes, alors $g = \varphi(f)$. On peut supposer $f = 0$, et puis considérer la réduction de g modulo chaque $\mathfrak{m} \in \mathrm{Sp}(B)$. Si la composée $A \to B/\mathfrak{m}$ de φ avec la projection naturelle était continue, alors on saurait que $g \in \mathfrak{m}$. Mais cette assertion découle du fait que le foncteur d'oubli de la catégorie des K-espaces de Banach finis vers Vec_K est pleinement fidèle, ainsi que du théorème de l'image ouverte de Banach. En particulier, on en déduit que g appartient au radical de Jacobson de B, qui coïncide avec son nilradical grâce au fait que B est de Jacobson. Mais le nilradical s'annule car B est réduit, donc $g = 0$ comme voulu. □

Définition 4.4. Soit A une K-algèbre affinoïde. On définit la semi-norme supremum comme suit

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathrm{Sp}(A)} |f(x)|, \tag{4.1}$$

pour tout $f \in A$.

Lorsque $A = T_d$, alors la semi-norme supremum récupère la norme de Gauss, d'après le principe du maximum et notre calcul de $\mathrm{Sp}(T_d)$. Notez que $\|\cdot\|_{\sup}$ n'est une norme que si A est réduite, car $\|f\|_{\sup} = 0$ si et seulement si f est nilpotent. C'est clair aussi que $\|\cdot\|_{\sup}$ est multiplicative par rapport aux puissances.

Proposition 4.5. *Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme de K-algèbres affinoïdes. Alors, $\|\varphi(a)\|_{\sup} \leq \|a\|_{\sup}$ pour tout $a \in A$. En particulier, on a $\|f\|_{\sup} \leq \|f\|_\alpha$ pour toute surjection $\alpha : T_n \to A$ et tout $f \in A$.*

Démonstration. Notons $b = \varphi(a)$ et pour chaque $y \in \mathrm{Sp}(B)$, notons x son image dans $\mathrm{Sp}(A)$ par tiré en arrière. On sait que $|b(y)| = |a(x)|$, d'où l'inégalité. Quant à la dernière assertion, pour tout $f \in T_n$ d'image $\bar{f}$, on a $\|\bar{f}\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} = \|f\|$, car la norme supremum de T_n coïncide avec la norme de Gauss. d'où $\|\bar{f}\|_{\sup} \leq \|f\|_\alpha$. □

Lemme 4.6. *Soit $p(X) = X^r + a_1X^{r-1} + \cdots + a_r = \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i) \in K[X]$ un polynôme de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \overline{K}$. Alors $\max_{1\leq i\leq r}|\alpha_i| = \max_{1\leq j\leq r}|a_j|^{1/j}$.*

Démonstration. Ce calcul facile est laissé en exercice. □

Lemme 4.7. *Soit A une algèbre affinoïde intégrale, $T_d \hookrightarrow A$ un homomorphisme injectif fini. Pour tout $f \in A$, il existe un seul polynôme irréductible $p_f(X) = X^r + a_1X^{r-1} + \cdots + a_r \in T_d[X]$ qui s'annule sur f. De plus, on a $\|f\|_{\sup} = \max_j \|a_j\|^{1/j}$.*

Démonstration. Puisque f est intégral sur l'anneau factoriel T_d, son polynôme minimal est à coefficients dans T_d par le lemme de Gauss. Soit maintenant $x \in \mathrm{Sp}(T_d)$ avec images réciproques $y_i \in \mathrm{Sp}(A)$ pour $1 \leq i \leq s$. On note que les $f(y_i)$ sont les racines du polynôme $p_{f(x)}(X) = \sum a_i(x)X^{r-i}$ à coefficients évalués sur x. Par le lemme précédent, le maximum de $\|f(y_i)\|$ pour $1 \leq s \leq r$ s'identifie au maximum des $\|a_j(x)\|^{1/j}$ pour tout $1 \leq j \leq r$. Vu que $\mathrm{Sp}(A)$ est un recouvrement fini de $\mathrm{Sp}(T_d)$, on obtient l'identité pour la semi-norme supremum. □

4.2. **Anneaux de définition et éléments à puissances bornées.** Lorsqu'on travaillait avec T_n, on a souvent profité de son sous-anneau borné T_d°, qui était muni de la topologie π-adique pour un élément π de $\mathfrak{m}_K$ quelconque. Dans cette sous-section, on généralisera cette notion aux K-algèbres affinoïdes.

Définition 4.8. Un anneau de définition A_0 pour A est un sous-anneau ouvert $A_0 \subset A$ dont la topologie sous-espace coïncide avec la topologie π-adique.

Lemme 4.9. *Soit A une K-algèbre affinoïde muni d'une surjection $\alpha\colon T_n \to A$. Alors $A_0 := \{f \in A\colon \|f\|_\alpha \leq 1\}$ est un anneau de définition pour A.*

Démonstration. La surjection ouverte α se restreint en une surjection ouverte $T_n^\circ \to A_0$. Comme T_n° porte la topologie π-adique, il en est de même de son quotient. □

Notons que le localisé $A_0[1/\pi]$ coïncide avec A, car la suite $\pi^n f \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Définition 4.10. Un sous-ensemble $S \subseteq A$ est dit borné si, pour tout voisinage ouvert $U \subseteq A$ de 0, il existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\pi^k S$ soit contenu dans U. Un élément $f \in A$ est dit à puissance bornée si l'ensemble $\{f^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ est borné. On note A° le sous-anneau des éléments à puissance bornée de A.

Proposition 4.11. *Soit $\alpha : T_n \twoheadrightarrow A$ une surjection. Alors, le sous-anneau $A_0 := \alpha(T_n^\circ)$ est contenu dans A°.*

Démonstration. Soit f un élément de A. Alors, nous avons $|f^n|_\alpha \leq |f|_\alpha^n$. Ainsi, si $|f|_\alpha \leq 1$, alors f appartient à A°. □

Proposition 4.12. *Soit $\alpha : T_n \twoheadrightarrow A$ une surjection et soit $f \in A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'élément f est à puissance bornée.

(2) L'élément f est intégral sur A_0.

(3) On a $\|f\|_{\sup} \leq 1$.

Démonstration. La condition (1) implique la condition (3) car nous avons $\|f\|_{\sup}^n = \|f^n\|_{\sup} \leq |f^n|_\alpha$. Pour voir que (3) implique (2), on peut supposer A intègre en quotientant par tout premier minimal. Notons d'abord que par le théorème de normalisation de Noether, nous pouvons trouver une application injective et finie $\varphi : T_d \to A$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & T_n \arrow[dr, two heads, "\alpha"] & \\ T_d \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook, "\varphi"] & & A \end{tikzcd}$$

Si $\|f\|_{\sup} \leq 1$, alors nous pouvons trouver des éléments $a_1, \dots, a_n \in T_d$ tels que :

$$f^n + \varphi(a_1) f^{n-1} + \cdots + \varphi(a_n) = 0 \tag{4.2}$$

et $\|a_i\| \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Comme l'inclusion ne fait que décroître les normes de Gauss, on voit que $\|\varphi(a_i)\|_\alpha \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On en déduit l'intégralité souhaitée. Enfin, (2) entraîne (1), car $A_0[f]$ est un A_0-module fini, donc forcément un sous-ensemble borné qui contient toutes les puissances de f. □

Corollaire 4.13. *Soient $f_1, \dots, f_m$ des éléments de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe un homomorphisme $\varphi \colon T_m \to A$ envoyant X_i sur f_i.

(2) Pour tout i, l'élément f_i est à puissance bornée.

En d'autres termes, l'algèbre T_m coreprésente le foncteur $A \mapsto (A^\circ)^m$.

Démonstration. Si φ existe, $\|f_i\|_{\sup} \leq \|X_i\|_{\sup} = 1$. Réciproquement, si les f_i sont à puissances bornées, la convergence de la série $\sum_i a_i f^i$ est assurée pour tout élément de T_n. □

Corollaire 4.14. *Soit A_0 l'anneau de définition provenant d'une surjection $T_n \twoheadrightarrow A$. Alors, l'anneau A° est la clôture intégrale de A_0 dans A.*

Démonstration. On a déjà vu que A° est contenu dans la clôture intégrale de $A_0 \subset A$. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $a_1, \dots, a_m \in A^\circ$ satisfaisant $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$. Alors, l'élément x est intégral sur l'anneau de définition $A_0[a_1, \dots, a_m]$ image de T_{n+m}° par la surjection qui envoient les m dernières coordonnées sur les a_i. Par conséquent, l'élément x est à puissance bornée. □

Remarque 4.15. C'est un théorème de Bosch–Güntzer–Remmert que pour tout K discrètement valué ou algébriquement clos et toute surjection $\alpha\colon T_n \to A$, l'application $T_n^\circ \to A^\circ$ est finie. Cependant, cela est faux pour des corps perfectoïdes comme le complété K de $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ pour $p \neq 2$. Considérons l'extension finie $L = K(p^{1/2})$ et notons $L_0 = K^\circ[p^{1/2}]$ l'anneau de définition provenant de la surjection $K\langle X\rangle \twoheadrightarrow L$ appliquant X sur $p^{1/2}$. Alors, L° n'est pas fini sur L_0 à cause des puissances $p^{1/2p^n}$ pour n arbitraire.

5. Espaces affinoïdes et sous-domaines affinoïdes

Comme précédemment, nous fixons un corps non archimédien K et une K-algèbre affinoïde A.

Définition 5.1. La catégorie des espaces affinoïdes, notée AffSp_K, est la catégorie opposée de AffAlg_K.

Le prochain objectif en géométrie rigide est de faire de $\mathrm{Sp}(A)$ un espace annelé en munissant $\mathrm{Sp}(A)$ d'une topologie et d'un faisceau structural. La topologie de Zariski induite par l'inclusion $\mathrm{Sp}\, A \subseteq \mathrm{Spec}\, A$ étant trop grossière pour une théorie analytique, on se penche vers la topologie canonique induite par la topologie non archimédienne sur $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathrm{Sp}(T_n) = \mathbb{B}^d(\bar{K})/\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \subseteq \bar{K}^d$ pour une surjection $\alpha\colon T_n \twoheadrightarrow A$.

Concrètement, cette topologie est engendrée par les ensembles $X(|f| \leq \varepsilon) := \{x \in X : |f(x)| \leq \varepsilon\}$ pour $f \in A$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. En fait, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$, car nous pouvons restreindre notre attention aux ε de la forme $|c|$ pour $c \in K^\times$, puis remplacer f par fc^{-1}. Cependant, nous avons vu que la topologie canonique est totalement discontinue, elle est donc trop fine. Nous devons trouver un juste milieu !

Définition 5.2. Un sous-ensemble $U \subseteq \mathrm{Sp}\, A$ est appelé un sous-domaine affinoïde si le foncteur $Y \mapsto \{Y \to X$ avec image ensembliste dans $U\}$ est représentable par un espace affinoïde.

C'est un bon exercice de faire cela pour les boules fermées de rayon décroissante.

Lemme 5.3. *Si $U \subseteq \mathrm{Sp}\, A$ est un sous-domaine affinoïde avec un morphisme universel $\iota : \mathrm{Sp}\, B \to U$, alors ι est une bijection.*

Démonstration. Soit x un point de U et soit $\mathfrak{m} \subseteq A$ l'idéal maximal correspondant. Par la propriété universelle, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & B/\mathfrak{m}B \\ A \arrow[u] \arrow[r, two heads] & A/\mathfrak{m} \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Cela montre que l'injection $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$ est en fait bijective, donc les fibres de $\mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A)$ sont triviales. $\square$

En effet, il s'avère que tout sous-domaine affinoïde $U = \mathrm{Sp}(B) \subset \mathrm{Sp}(A)$ est ouvert et que B est plat sur A. Notons X son spectre maximal $\mathrm{Sp}(A)$. Le type le plus important de sous-domaine affinoïde est le suivant :

Définition 5.4. Soient $f_0, f_1, \ldots, f_r \in A$ des éléments engendrant l'idéal unité de A. Nous définissons

$$X\left(\frac{f_1, \ldots, f_r}{f_0}\right) := \{x \in X : |f_i(x)| \leq |f_0(x)|, i = 1, \ldots, r\}. \tag{5.2}$$

Tout sous-ensemble de cette forme est appelé un *sous-domaine rationnel.*

Proposition 5.5. *Tout sous-domaine rationnel $U = X\left(\frac{f_1,\ldots,f_r}{g}\right) \subseteq X$ est un sous-domaine affinoïde. L'algèbre représentant U est*

$$B = A\left\langle\frac{f_1, \ldots, f_r}{g}\right\rangle = A\langle X_1, \ldots, X_r\rangle/(gX_1 - f_1, \ldots, gX_r - f_r). \tag{5.3}$$

Démonstration. Soit $\varphi : A \to C$ un homomorphisme d'algèbres affinoïdes. Alors, dire que l'application $\operatorname{Sp}\varphi : \operatorname{Sp} C \to \operatorname{Sp} A$ se factorise par U en tant qu'application d'ensembles revient à dire que pour chaque i et chaque $x \in \operatorname{Sp} C$, nous avons $|\varphi(f_i)(x)| \leq |\varphi(g)(x)| \neq 0$; cette dernière condition implique en particulier que l'élément $\varphi(g)$ est une unité, ce qui implique que pour chaque i, nous pouvons considérer la fraction $\varphi(f_i)/\varphi(g)$ comme un élément de C.

Si $\operatorname{Sp}\varphi$ se factorise par U, alors pour tout $x \in \operatorname{Sp} C$, nous avons $|\varphi(f_i)(x)/\varphi(g)(x)| \leq 1$, ce qui implique que $\|\varphi(f_i)/\varphi(g)\|_{\sup} \leq 1$. Par la propriété universelle des algèbres de Tate, nous obtenons un morphisme $A\langle X_1, \ldots, X_r\rangle \to C : X_i \mapsto \varphi(f_i)/\varphi(g)$ qui envoie $gX_i - f_i$ sur 0 et, de ce fait, se factorise par $A\langle f_1, \ldots, f_r \mid g\rangle \to C$. Celui-ci est déterminé de manière unique, car $A[1/g]$ est dense dans $A\langle f_1, \ldots, f_r \mid g\rangle$.

D'autre part, supposons que φ se factorise par un morphisme $B \to C$. Soit c_i l'image de X_i dans C. Par la propriété universelle de l'algèbre de Tate, pour tout $x \in \operatorname{Sp} C$, nous avons $|c_i(x)| \leq 1$, ce qui donne $|\varphi(f_i)(x)| = |\varphi(g)(x)c_i(x)| \leq |\varphi(g)(x)| \neq 0$. Ceci implique que $\operatorname{Sp}\varphi : \operatorname{Sp}(C) \to \operatorname{Sp}(A)$ se factorise par U. $\square$

Définition 5.6. Pour $f \in A$, nous écrivons $X(f)$ pour désigner le sous-domaine rationnel $X(f|1)$, et nous écrivons $X(f^{-1})$ pour désigner le sous-domaine rationnel $X(1|f)$. Observons que X est recouvert par $X(f)$ et $X(f^{-1})$; un tel recouvrement est appelé un *recouvrement de Laurent simple.* Plus généralement, un *domaine de Laurent* est un sous-domaine affinoïde de la forme $X(f_1) \cap \cdots \cap X(f_n) \cap X(g_1^{-1}) \cap \cdots \cap X(g_m^{-1})$, pour $f_i, g_j \in A$.

Exemple 5.7. $X = \operatorname{Sp}(K\langle T\rangle)$.

(1) $X\left(\frac{T}{1}\right)$: Domaine de Weierstrass $X(T)$ représenté par $K\langle T, Y\rangle/(Y - T) = K\langle T\rangle$.

(2) $X\left(\frac{T}{p}\right)$: Domaine de Weierstrass $X(p^{-1}T)$ représenté par $K\langle T, Y\rangle/(pY - T) = K\langle Y\rangle$.

(3) $X\left(\frac{1}{T}\right)$: Domaine de Laurent représenté par $K\langle T, Y\rangle/(YT - 1) = K\langle T, T^{-1}\rangle$.

C'est un théorème de Gerritzen–Grauert que tout sous-domaine affinoïde est une réunion finie de domaines rationnels. Donc ceux-là contrôlent la topologie de Grothendieck naturelle sur les espaces rigides.

6. La théorie des espaces rigides-analytiques

En raison des contraintes de temps, j'ai décidé d'arrêter ici la portion du cours consacrée aux espaces rigides. En tout cas, je veux énoncer les résultats les plus importants.

Comme les sous-domaines affinoïdes sont par définition représentables par une algèbre K-affinoïde, cela nous permet de définir le préfaisceau des fonctions affinoïdes $\mathcal{O}_X$.

Théorème 6.1 (Tate, [BGR84, Theorem 8.2.1])**.** *Soit X un espace affinoïde. Le préfaisceau $\mathcal{O}_X$ est un faisceau pour la topologie de Grothendieck engendrée par les sous-domaines affinoïdes.*

En particulier, la suite suivante pour $f \in A$:

$$0 \to A \to A\langle f\rangle \oplus A\langle f^{-1}\rangle \xrightarrow{(g,h)\mapsto g-h} A\langle f, f^{-1}\rangle \to 0 \tag{6.1}$$

est exacte et la preuve consiste en effet à se ramener à ce cas-là, comme on le verra plus tard pour les espaces adiques.

Définition 6.2. Un espace analytique rigide est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ pour une topologie de Grothendieck, admettant un recouvrement admissible par des espaces affinoïdes.

Le foncteur des espaces affinoïdes $\mathrm{Sp}(A)$ vers les espaces rigides est pleinement fidèle. Les espaces rigides peuvent être retrouvés par Yoneda dans la catégorie des faisceaux.

On peut passer des schémas aux espaces rigides comme suit :

Définition 6.3. L'analytification X^{an} d'un K-schéma X est le K-espace rigide final parmi tous ceux qui s'envoient sur X.

Par exemple, pour l'espace affine de dimension n, on obtient $\mathbb{A}_K^{n,\mathrm{an}} := \cup_r \mathbb{B}(0, |\pi|^{-r})$. Pour un K-schéma X de type fini, on obtient son analytification X^{an} en recollant des fermés de Zariski de $\mathbb{A}_K^{n,\mathrm{an}}$ correspondant aux ouverts affines $U \subset X$.

Soit A une K-algèbre affinoïde. À un A-module fini M, on associe un faisceau cohérent $M \otimes_A \mathcal{O}_X$, où $X = \mathrm{Sp}(A)$. On a encore l'acyclicité :

Théorème 6.4 (Tate, [BGR84, Theorem 8.2.1])**.** *Si $X = \mathrm{Sp}(A)$, alors le faisceau $M \otimes_A \mathcal{O}_X$ est acyclique pour tout recouvrement affinoïde admissible.*

On a la même notion de faisceau cohérent :

Définition 6.5. Soit X un K-espace rigide. On dit qu'un faisceau en $\mathcal{O}_X$-modules est cohérent s'il provient localement, pour la topologie admissible, de modules finis sur les sections des ouverts affinoïdes.

Théorème 6.6 (Kiehl, [BGR84, Theorem 9.4.3])**.** *Soit $X = \mathrm{Sp}(A)$ un K-espace rigide affinoïde. Alors, le foncteur $\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Coh}_X$ est une équivalence.*

Un morphisme $f \colon X \to Y$ est propre si la diagonale Δ_f et une immersion fermée et si l'on peut trouver des recouvrements affinoïdes admissibles relativement compacts. Par exemple, les fermés de $\mathbb{P}_K^{n,\mathrm{an}}$ sont propres.

Théorème 6.7 (Kiehl, [BGR84, Theorem 9.4.1])**.** *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides sur K et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Alors les $R^i\varphi_*\mathcal{F}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents.*

Il y a aussi un théorème GAGA en géométrie rigide ressemblant à celui en géométrie complexe. Soit X un K-schéma localement de type fini. On a son analytification X^{an}, un K-espace rigide localement de type fini et un morphisme d'espaces localement annelés $(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$.

Théorème 6.8 (GAGA, [BGR84, §9.6])**.** *Soit X un schéma projectif sur K. Alors, le foncteur $\mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}})$ est une équivalence fonctorielle par rapport aux images directes supérieures.*

Soit X une K-courbe rigide propre et lisse. On peut parler du groupe de ses diviseurs $\mathrm{Div}(X)$ et lui associer des faisceaux inversibles $\mathcal{O}_X(D)$. Les groupes de cohomologie étant finis, on peut définir aussi la caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{O}_X(D))$ comme d'habitude.

Théorème 6.9 (Riemann–Roch)**.** *Pour tout diviseur D sur une K-courbe rigide X propre et lisse, on a $\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \deg(D)$.*

Comme conséquence, on obtient une classification des courbes rigides propres et lisses.

Théorème 6.10. *Toute courbe analytique rigide propre est projective, elle provient donc de l'analytification d'une courbe algébrique propre sur K.*

Sur $\mathbb{C}$, toute courbe elliptique E s'écrit comme $E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ avec $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Au moyen de l'exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, donnée par $z \mapsto e^{2\pi i z}$, cela se réécrit comme $\mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}$ où $q = e^{2\pi i \tau}$ satisfait $0 < |q| < 1$. Cela se généralise au cas ultramétrique.

Soit K un corps non archimédien complet. On remplace $\mathbb{C}^\times$ par l'espace rigide $\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}} := \mathbb{A}_K^{1,\mathrm{an}} \setminus \{0\}$. Soit $q \in K$ avec $0 < |q| < 1$. Le groupe $q^{\mathbb{Z}}$ opère sur $\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}}$ de façon discontinue, donc le quotient par l'action existe en tant qu'espace rigide : on définit la courbe de Tate

$$E_q = \mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} / q^{\mathbb{Z}}. \tag{6.2}$$

Théorème 6.11. *La courbe de Tate E_q est un espace rigide de dimension 1 connexe, propre et lisse. En fait, E_q est une courbe elliptique projective sur K.*

En utilisant les formes modulaires classiques, on peut aussi donner une équation explicite pour E_q :

$$y^2 + xy = x^3 - a_4(q)x - a_6(q), \tag{6.3}$$

où

$$a_4(q) = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n} = 5q + 45q^2 + 140q^3 + \cdots \tag{6.4}$$

$$a_6(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n (7n^5 + 5n^3)}{12(1 - q^n)} = q + 23q^2 + 154q^3 + \cdots . \tag{6.5}$$

Son invariant j est donné par la formule classique

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots , \tag{6.6}$$

qui possède une valeur absolue $|j(q)| > 1$. On peut voir que le $\mathcal{O}_K$-modèle entier $\mathfrak{X}_q$ donné par l'équation de Weierstrass a une singularité nodale à l'origine de la fibre spéciale avec des K-vecteurs tangents. Les courbes de Tate retrouvent alors toutes les K-courbes elliptiques algébriques ayant une réduction multiplicative déployée.

7. Anneaux de Tate

Dans cette section, on introduit les anneaux topologiques qui seront fondamentaux pour faire de la géométrie adique et, plus tard, de la géométrie perfectoïde.

7.1. **Définition.** L'idée est de demander de l'anneau topologique A le minimum d'hypothèses qui ressemblent à celles des algèbres affinoïdes. On ne travaille qu'avec des anneaux complets.

Définition 7.1. Un anneau topologique A est de Tate s'il est complet, admet une unité topologiquement nilpotente ϖ et un sous-anneau ouvert A_0 contenant ϖ tel que A_0 porte la topologie ϖ-adique.

On appelle A_0 un anneau de définition de A, et ϖ une pseudo-uniformisante. On a encore les même notions de parties bornées et d'éléments à puissance bornée dont l'ensemble est noté A°. Le sous-ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A est noté $A^{\circ\circ}$.

Proposition 7.2. *Soit A un anneau de Tate. Alors, A° est un sous-anneau ouvert et intégralement clos de A, et il est l'union de tous les anneaux de définition de A. De plus, $A^{\circ\circ}$ est un idéal radical de A°.*

Démonstration. On voit aisément que tout sous-anneau borné de A est contenu dans un anneau de définition. Par conséquent, tout élément à puissance bornée de A est contenu dans un anneau de définition, donc A° est contenu dans l'union de tous les anneaux de définition de A. Réciproquement, si A_0 est un anneau de définition de A, alors il est borné, donc tous ses éléments sont à puissance bornée, d'où $A_0 \subset A^\circ$. Il en résulte que A° est ouvert, en tant que réunion d'ouverts.

Montrons que A° est intégralement clos dans A. Soit $a \in A$ intégral sur A°. D'après le paragraphe précédent, il existe un anneau de définition A_0 tel que a soit intégral sur A_0, donc $A_0[a]$ est un A_0-module fini, et en particulier, borné. Ceci implique que a est à puissance bornée, c'est-à-dire $a \in A^\circ$.

Prouvons que $A^{\circ\circ}$ est un idéal radical de A°. Pour voir que $A^{\circ\circ}$ est stable par la somme, on applique la formule du binôme. Pour voir la stabilité par multiplication par A°, on peut se ramener aux anneaux de définition et le résultat devient clair. Finalement, la notion de topologiquement nilpotent est stable par puissances, donc l'idéal est forcément radical. □

7.2. **Produits tensoriels.**

Proposition 7.3. *Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux morphismes d'anneaux de Tate. Alors, la catégorie des anneaux de Tate admet une somme amalgamée de B et C sur A, qui sera notée $B \widehat{\otimes}_A C$.*

Démonstration. On choisit des anneaux de définition $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ et $C_0 \subset C$ tels que $f(A_0) \subset B_0$ et $g(A_0) \subset C_0$. Soit D_0 le complété pour la topologie ϖ-adique de l'image de $B_0 \otimes_{A_0} C_0$ dans $B \otimes_A C$. On munit $D := D_0[\varpi^{-1}]$ de la structure d'annneau topologique de la colimite $\mathrm{colim}_{n\in\mathbb{Z}} \varpi^n D_0$. On voit facilement que la multiplication envoie $\varpi^n D_0 \times \varpi^m D_0$ sur $\varpi^{n+m} D_0$, donc elle est continue. Pour la propriété universelle, on vérifie aisément grâce au produit tensoriel habituel et à la complétion qu'on a un morphisme continu $D \to E$, car $\varpi^n(B_0 \otimes_{A_0} C_0)$ s'envoie sur E_0 pour $n \gg 0$. □

7.3. **Algèbres de Tate et localisations.** Dans cette section, on introduit les algèbres de Tate au-dessus d'un anneau de Tate complet A quelconque. On avait déjà traité cette notion dans le cadre des corps non-archimédiens, mais maintenant on s'occupe du cadre relative.

Proposition 7.4. *Soit A un anneau de Tate complet, $A_0 \subset A$ un anneau de définition et ϖ une pseudo-uniforsimante. Soit I un ensemble fini et $X = (X_i)_{i\in I}$. Considérons l'anneau donné par*

$$T_I(A) := \{\sum_\nu a_\nu X^\nu \in A[[X]] \colon a_\nu \to 0 \text{ quand } \nu \to \infty\} \tag{7.1}$$

Alors, il existe une unique structure d'anneau topologique sur $T_I(A)$ pour laquelle il coreprésente le foncteur $B \mapsto (B^\circ)^I$ dans la catégorie des A-algèbres de Tate.

Démonstration. On muni $T_I(A)$ de la structure d'anneau topologique induite par la colimite en $\mathbb{Z}$ des sous-groupes $\varpi^n T_I(A_0)$. Notons que $T_I(A_0)$ est le complété de $A_0[X]$ pour la topologie ϖ-adique, donc $T_I(A)$ est aussi complet. Les indéterminées X_i sont à puissance bornée, donc on voit aisément que tout I-tuple dans B° pour un anneau de Tate muni d'un morphisme continu $A \to B$ détermine un seul morphisme d'anneaux de Tate $T_I(A) \to B$. En effet, leurs images b_i sont à puissance bornée, donc la série $\sum_\nu a_\nu b^\nu$ converge dans l'anneau complet B. □

Proposition 7.5. *Soit A un anneau de Tate complet, et $f_1, \dots, f_n, g \in A$ tels que $A = (f_1, \dots, f_n)$. Alors, le quotient $A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ de $T_I(A)$ par l'adhérence de $(f_i - gX_i)_{i\in I}$ est la A-algèbre de Tate initiale parmi tous celles telles que l'image de g soit inversible et les images des $f_i g^{-1}$ soient à puissance bornée.*

Démonstration. Ce quotient est un anneau de Tate complet admettant $A_0\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle \subset A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ muni de sa topologie ϖ-adique pour anneau de définition. On peut écrire ce dernier comme la colimite indexée par $\mathbb{Z}$ des $\varpi^n A_0\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$. Par construction, g est inversible vu que $A = (f_1, \dots, f_n)$ et les fractions $f_i g^{-1}$ sont à puissance bornée. Ceci fournit d'immédiat la propriété universelle parmi les A-algèbres de Tate. □

7.4. **Un peu d'analyse fonctionnelle.** Nous devons mentionner un outil très important, le théorème de l'application ouverte de Banach, issu de l'analyse fonctionnelle, que nous emploierons à nouveau plusieurs fois dans la suite et qui avait déjà été utilisé pour montrer la continuité des homomorphismes entre K-algèbres affinoïdes.

Théorème 7.6 (application ouverte de Banach [Col02, I.1.2.1])**.** *Soit A un anneau de Tate complet. Alors tout homomorphisme A-linéaire $M \to N$ continu et surjectif entre A-espaces de Banach est ouvert.*

On a quelques corollaires importants du Theorem 7.6 :

Corollaire 7.7 (graphe fermé [Col02, I.1.2.2])**.** *Soit A un anneau de Tate complet. Une application K-linéaire $\varphi : M \to N$ entre A-espaces de Banach est continue si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ d'éléments de M, tout $a \in M$ et tout $b \in N$, si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ converge vers a et $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ converge vers b, alors $\varphi(a) = b$.*

Un autre résultat important est :

Corollaire 7.8. *Soit A un anneau de Tate complet noethérien. Alors, la catégorie des A-espaces de Banach finis est abélienne et s'identifie par le foncteur d'oubli à la catégorie abélienne des A-modules finis.*

Notons que le Corollary 7.8 entraîne déjà que toute inclusion d'A-modules finis est stricte, c'est-à-dire, son image est fermée, car sinon le quotient d'une inclusion ne serait pas séparé, contredisant l'équivalence ci-dessus.

7.5. **Anneaux d'éléments intégraux.** On s'intéresse aux sous-ensembles de $\mathrm{Cont}(A)$ définis par des conditions du type $|a(x)| \leq 1$ pour a dans un certain sous-anneau intégralement clos $A^{\circ\circ} \subset A^+ \subset A^\circ$ de A. Si $x \in \mathrm{Cont}(A)$ a rang 1, alors $|a(x)| \leq 1$ pour tout $a \in A^\circ$. Cependant, cela devient faux en rang 2 et on laisse au lecteur le soin d'en construire un exemple. On va formaliser la notion du sous-anneau A^+.

Définition 7.9. Soit A un anneau de Tate. Un *anneau d'éléments intégraux* dans A est un sous-anneau $A^{\circ\circ} \subset A^+ \subset A^\circ$ intégralement clos dans A. On dit alors que (A, A^+) est une *paire de Tate*. Un *morphisme de paires de Tate* $\varphi : (A, A^+) \to (B, B^+)$ est un morphisme d'anneaux continu $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi(A^+) \subset B^+$.

Le plus grand anneau d'éléments intégraux est A°, et le plus petit est la clôture intégrale $A^\dagger$ de $\mathbb{Z} + A^{\circ\circ}$. Si K est un corps non-archimédien, alors tout anneau de valuation $V \subset \mathcal{O}_K$ induisant la même topologie est un anneau d'éléments intégraux dans K, car il contient aussi $\mathfrak{m}_V$.

Soient (A, A^+) une paire de Tate complète, I un ensemble fini et soit $X = (X_i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées. On obtient une paire de Tate $(T_I(A), T_I(A^+))$ et elle satisfait à la même propriété universelle.

Proposition 7.10. *La paire $(T_I(A), T_I(A^+))$ est de Tate et coreprésente le foncteur $(B, B^+) \mapsto (B^+)^I$ dans la catégorie des paires de Tate sur (A, A^+).*

Démonstration. On dispose déjà du morphisme $T_I(A) \to B$ et il envoie $T_I(A^+)$ sur B^+ si et seulement si tout élément du I-tuple appartient à B^+. □

Soit (A, A^+) une paire de Tate. Soient $f_1, \dots, f_n, g \in A$ tels que $A = (f_1, \dots, f_n)$. Notons $A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle^+$ la clôture intégrale de l'image dee $T_I(A^+) \to A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle$.

Proposition 7.11. *La paire $(A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle, A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle^+)$ est de Tate et initiale parmi tous celles (B, B^+) telles que l'image de g dans B soit inversible et les images des $f_i g^{-1}$ soient dans B^+.*

Démonstration. Cela découle du fait que le morphisme $A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle \to B$ envoie $A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle^+$ vers B^+ si et seulement si $\varphi(f_i)\varphi(g)^{-1} \in B^+$. □

8. Spectre adique

8.1. **Valuations.** Rappelons qu'un sous-anneau V d'un corps K est valuatif si pour tout $x \in K$, il contient au moins l'un des $\{x, x^{-1}\}$. On munit le groupe abélien $\Gamma_V := K^\times / V^\times$ de l'ordre totale $aV^\times \leq bV^\times$ si $ab^{-1} \in V^\times$. Ceci nous mène à étudier les groupes abéliens totalement ordonnés.

Définition 8.1. Un groupe abélien totalement ordonné est un groupe abélien $(\Gamma, +)$ muni d'une relation d'ordre totale $\leq$ telle que pour tout $a, b, c \in \Gamma$, $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

Voici quelques exemples.

Exemple 8.2. Le groupe $\mathbb{R}_{>0}$ avec sa relation d'ordre usuelle ; plus, généralement, tout son sous-groupe, comme par exemple $\gamma^{\mathbb{Z}}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. En rang supérieur, on a $\mathbb{R}^n_{>0}$ muni de l'ordre lexicographique pour tout entier naturel non nul n.

Notons aussi que les groupes abéliens totalement ordonnés sont sans torsion.

Définition 8.3. Soit A un anneau. Une valuation sur R est une application $|\cdot| : A \to \Gamma \cup \{0\}$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné et on déclare $0 \leq \Gamma$, satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $|0| = 0, |1| = 1$;
(2) $\forall x, y \in A, |xy| = |x||y|$;
(3) $\forall x, y \in A, |x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Il y a une notion évidente d'équivalence en considérant la relation $|x| \leq |y|$ sur A. La valuation triviale envoie chaque élément non nul de A sur 1. Pour chaque $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, on obtient une valuation sur A en tirant la valuation triviale de $A/\mathfrak{p}$ en arrière.

Proposition 8.4. *Soit K un corps. Il y a une bijection naturelle entre les sous-anneaux de valuation de K et les valuations sur K à équivalence près.*

Démonstration. Si $v : K \to \Gamma \cup \{0\}$ est une valuation, alors $V := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ est un sous-anneau de valuation de K, et son idéal maximal est donné par la formule $\mathfrak{m}_V = \{x \in K \mid |x| < 1\}$. Réciproquement, soit V un sous-anneau de valuation de K. Soit $\Gamma_V = K^\times / V^\times$; pour $a, b \in K^\times$, on écrit $aV^\times \leq bV^\times$ si $ab^{-1} \in V$. Alors, cela confère à Γ une structure de groupe abélien totalement ordonné, et l'application $|\cdot| : K \to \Gamma \cup \{0\}$ définie par $|0| = 0$ et $|a| = aV^\times$ si $a \neq 0$ est une valuation sur K. □

L'ensemble de la Proposition 8.6 s'appelle l'espace de Riemann–Zariski et il est noté $\mathrm{RZ}(K)$. Maintenant, on discute la notion de rang pour les valuations. D'abord on définit la hauteur de Γ.

Définition 8.5. Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné. Un *sous-groupe convexe* de Γ est un sous-groupe Δ de Γ tel que, pour tous $a, b, c \in \Gamma$, si $a \leq b \leq c$ and $a, c \in \Delta$, alors $b \in \Delta$.

Les sous-groupes triviaux $\{0\}$ et Γ sont toujours convexes. Mais, par exemple, si $\Gamma = \mathbb{R}^2_{>0}$ muni de l'ordre lexicographique, alors le premier facteur $\mathbb{R} \times \{0\}$ n'est pas convexe, mais le dernier $\{0\} \times \mathbb{R}$ en est.

Proposition 8.6 ([Hub93, §3])**.** *Les sous-groupes convexes de Γ forment un ensemble ordonné par l'inclusion dont l'opposé est bien ordonné. Cet ordinal est appelé la* hauteur *de Γ et est noté* $\mathrm{ht}(\Gamma)$.

Si $\mathrm{ht}(\Gamma) \leq 1$, alors Γ n'a pas de sous-groupes convexes non triviaux. C'est le cas des sous-groupes de $\mathbb{R}_{>0}$ et la réciproque est vraie. L'hauteur est additive en suites exactes courtes, donc $\Gamma = \mathbb{R}^n_{>0}$ muni de l'ordre lexicographique est de hauteur n. On définit le rang d'une valuation $|\cdot|\colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ comme la hauteur du sous-groupe de Γ engendré par $|A| \cap \Gamma$.

Proposition 8.7. *Soit* Γ *un groupe abélien totalement ordonné. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathrm{ht}(\Gamma) \leq 1$ *;*

(2) pour tous $a, b \in \Gamma$ *tels que* $a > 1$ *et* $b \geq 1$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $b \leq a^n$ *;*

(3) il existe un plongement $\Gamma \to \mathbb{R}_{>0}$*.*

Démonstration. Considérons l'enveloppe convexe Δ de $a^{\mathbb{Z}}$ dans Γ. La condition $\mathrm{ht}(\Gamma) \leq 1$ signifie que $\Delta = \{1\}$ ou $\Delta = \Gamma$. Comme $a > 1$, $\Delta = \Gamma$. Cela implique évidemment que $b \leq a^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Quant à la construction de l'application $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}_{>0}$, on va simplement l'esquisser. Fixons un élément $a \in \Gamma$ tel que $a > 1$ et supposons que l'enveloppe convexe de $a^{\mathbb{Z}}$ est égal à Γ. Soit $\rho \in \mathbb{R}_{>1}$ et définissons $\log_\rho \varphi(b)$ comme $\inf\{\frac{m}{n} \colon b^n \leq a^m\}$. □

8.2. **Spectre adique.**

Définition 8.8. Soit A un anneau et $|\cdot| : A \to \Gamma \cup \{0\}$ une valuation non-triviale sur A. La *topologie valuative* sur A associée à $|\cdot|$ est la topologie définie par le système fondamental de nilvoisinages ouverts $A_{\leq\gamma} = \{a \in A \colon |a| \leq \gamma\}$, pour $\gamma \in \Gamma$.

Cela confère à A une structure d'anneau topologique, et l'application $|\cdot|$ est continue si l'on munit $\Gamma \cup \{0\}$ de la topologie discrète. Pour les anneaux de Tate, cela nous permet de définir les valuations continues.

Définition 8.9. Soit A un anneau de Tate. On dit qu'une valuation $|\cdot|$ non-triviale sur A est *continue* si la topologie valuative sur A est moins fine que la topologie de Tate dont A vient muni.

En d'autres termes, une valuation $|\cdot| : A \to \Gamma \cup \{0\}$ est continue sur A si et seulement si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'ensemble $A_{\leq\gamma}$ est un ouvert de A. Si $a \in A^{\circ\circ}$, alors la continuité de la valuation entraîne que $|a^n| \leq \gamma$ pour tout γ et $n \gg 0$ assez grand (en fonction de γ). On en déduit que $A^{\circ\circ} \subset A_{<1}$ et que l'enveloppe convexe de $|\varpi|^{\mathbb{Z}}$ est égal au sous-groupe engendré par $|A| \cap \Gamma$ pour toute pseudo-uniformisante.

Exemple 8.10. Soit K un corps muni d'une valuation non triviale $|\cdot|$ qui est microbienne au sens de Huber, c'est-à-dire, il existe $\varpi \in K$ dont l'enveloppe convexe de $|\varpi|^{\mathbb{Z}}$ est égal à $|K^\times|$. Soit $K^+ \subset K$ le sous-anneau de valuation et supposons K muni de et complet pour la topologie valuative. Alors (K, K^+) est un anneau de Tate uniforme (c'est-à-dire K° y est borné) et ϖ en est une uniformisante. En fait, en localisant K^+ dans l'idéal premier correspondant au sous-groupe convexe de Γ de corang 1, on voit que K° est un anneau de valuation de rang 1 et que K est un corps non-archimédien.

Néanmoins, il n'est pas typiquement vrai que $A^\circ \subset A_{\leq_x 1}$ pour toute valuation continue. C'est essentiellement pour cette raison qu'on avait introduit les paires de Tate (A, A^+).

Définition 8.11. Soit (A, A^+) une paire de Tate. On définit son spectre adique, noté $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, comme l'ensemble des valuations continues x de A à équivalence près telles que $A^+ \subset A_{\leq_x 1}$.

Notons que $(A, A^+) \mapsto \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est contravariant en paires de Tate, donc renverse des inclusions d'anneaux d'éléments intégraux. De plus, $\mathrm{Spa}(A, A^\dagger)$ est l'ensemble de toute valuation continue de A à équivalence près. On peut même donner une caractérisation raisonnable de toutes les valuations continues d'un anneau de Tate.

Théorème 8.12. *Soit A un anneau de Tate. Une valuation $x\colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ appartient à $\mathrm{Spa}(A, A^\dagger)$ si et seulement si $A^{\circ\circ} \subset A_{<_x 1}$ et l'enveloppe convexe de $|\varpi(x)|^{\mathbb{Z}}$ coïncide avec Γ_x.*

Démonstration. On avait déjà remarqué qu'une valuation continue satisfait aux conditions de l'énoncé. Réciproquement, soit $x\colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ satisfaisant aux conditions énoncées. On a $0 < |\varpi(x)| < 1$ pour toute pseudo-uniformisante. Soit $\gamma \in \Gamma_x$ et $n \in \mathbb{Z}$ un entier tel qu $|\varpi(x)|^n < \gamma$. Comme $|a(x)| < 1$ pour tout $a \in \varpi A_0 \subset A^\circ$, cela implique $|a(x)| < |\varpi(x)|^n \leq \gamma$ pour tout $a \in \varpi^{n+1} A_0$, de sorte que ce nilvoisinage ouvert est inclus dans $A_{\leq_x \gamma}$ comme souhaité. □

On peut munir l'espace adique d'une certaine topologie :

Définition 8.13. Soit (A, A^+) une paire de Tate. On munit son spectre adique $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ de la topologie engendrée par les *sous-ensemble rationnels*, c'est-à-dire, de la forme

$$R\left(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}\right) = \{x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)\colon \forall i \in 1, \ldots, n,\ |f_i(x)| \leq |g(x)| \neq 0\}, \tag{8.1}$$

où $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ sont tels que $A = (f_1, \ldots, f_n)$.

La condition $|g(x)| \neq 0$ peut être supprimée en vertu du fait que $A = (f_1, \ldots, f_n)$. Parlons de la fonctorialité. Soit $\varphi : (A, A^+) \to (B, B^+)$ un morphisme de paires de Tate. Alors, en pré-composant avec φ, on déduit une application continue $\mathrm{Spa}(B, B^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$, que nous noterons $\mathrm{Spa}(\varphi)$. Les propriétés de base de ces applications sont données dans la proposition suivante.

Proposition 8.14. *Soit $\varphi : (A, A^+) \to (B, B^+)$ un morphisme de paires de Huber. Alors, l'image réciproque par $\mathrm{Spa}(\varphi)$ de tout domaine rationnel de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est un domaine rationnel de $\mathrm{Spa}(B, B^+)$.*

Démonstration. Soient $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ tels que $A = (f_1, \ldots, f_n)$. En particulier, $B = (\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n))$ et on a clairement

$$f^{-1}\left(R\left(\tfrac{f_1,\ldots,f_n}{g}\right)\right) = R\left(\tfrac{\varphi(f_1),\ldots,\varphi(f_n)}{\varphi(g)}\right), \tag{8.2}$$

comme souhaité. □

Corollaire 8.15. *Soit (A, A^+) une paire de Tate complète, et soient $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ tels que $A = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $\varphi : (A, A^+) \to (A\langle\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}\rangle, A\langle\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}\rangle^+)$ l'application canonique. Alors $\mathrm{Spa}(\varphi)$ induit un homéomorphisme*

$$\mathrm{Spa}(A\langle\tfrac{f_1,\ldots,f_n}{g}\rangle, A\langle\tfrac{f_1,\ldots,f_n}{g}\rangle^+) \simeq R\left(\tfrac{f_1,\ldots,f_n}{g}\right) \tag{8.3}$$

qui préserve et reflète sous-ensembles rationnels.

Démonstration. Notons $f = \mathrm{Spa}(\varphi)$, $(B, B^+) = (A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle, A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle^+)$ et $U = R\left(\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\right)$. Comme φ est spectral, l'image réciproque par f d'un domaine rationnel de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est un domaine rationnel de $\mathrm{Spa}(B, B^+)$, voir Proposition 8.14. Il suffit donc de prouver que f envoie les domaines rationnels sur des domaines rationnels et induit une bijection de $\mathrm{Spa}(B, B^+)$ vers U.

Comme l'anneau sous-jacent à B contient $A[g^{-1}]$ comme sous-anneau dense, si nous avons deux valuations continues sur B qui coïncident sur l'image de A, alors elles coïncident sur B. Ainsi f est injective. Soit $x \in \mathrm{Spa}(B, B^+)$ et soit $y = f(x)$. On a $|g(x)| = |g(y)| \neq 0$ car g est inversible dans B. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $f_i g^{-1} \in B^+$, donc $|(f_i g^{-1})(x)| \leq 1$, et $|f_i(y)| = |f_i(x)| \leq |g(x)| = |g(y)| \neq 0$. Par conséquent, $y \in U$. Soit $y \in U$. On a $|f_i(y)| \leq |g(y)| \neq 0$ et $|\varpi(y)| < 1$, donc y s'étend en une valuation continue x sur B telle que $|b(x)| \leq 1$ pour tout $b \in B^+$, ce qui donne un point x de $\mathrm{Spa}(B, B^+)$.

Il reste à montrer que f envoie les domaines rationnels de $\mathrm{Spa}(B, B^+)$ sur des domaines rationnels de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Soient $t_1, \dots, t_m, s \in B$ tels que $B = (t_1, \dots, t_m)$, et soit $E = R\left(\frac{t_1,\dots,t_m}{s}\right) \subset \mathrm{Spa}(B, B^+)$ et notons (C, C^+) la paire localisée. Quitte à multiplier $t_1, \dots, t_m, s$ par une puissance assez élevée de g et à perturber les termes des séries en degré assez grand, on peut supposer que $t_1, \dots, t_m, s \in A$, comparer avec le théorème 8.16. Bien sûr, nous ne savons pas si $t_1, \dots, t_m$ engendrent A. Cependant, on a $s^{-1} \in \varpi^{-n}C^+$ pour $n \gg 0$, donc on a $|\varpi^n(x)| \leq |s(x)|$ pour tout point dans $f(E)$. Donc cette image s'identifie à l'intersection de U avec la partie rationnelle déterminée par $t_1, \dots, t_m, \varpi^n, g$, ce qui reste rationnel. □

Pour contrôler la composition des localisations rationnels, le lemme technique suivant de perturbation a joué un rôle. Cela sera le cas aussi pour le basculement dans le cadre perfectoïde.

Lemme 8.16. *Soit A un anneau de Tate et soient $f_1, \dots, f_n, g$ des éléments de A tels que $A = (f_1, \dots, f_n)$. Alors il existe $N \gg 0$ tel que, pour tous $f'_1, \dots, f'_n, g' \in A$, si $f'_i \in f_i + \varpi^N A_0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $g' \in g + \varpi^N A_0$, alors $A = (f'_1, \dots, f'_n)$ et*

$$R\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) = R\left(\frac{f'_1, \dots, f'_n}{g'}\right). \tag{8.4}$$

Démonstration. On laisse au lecteur le soin de démontrer cette assertion. □

Parlons maintenant des *point adiques.* Ce sont les spectres adiques des paires de Tate valuatives (K, K^+). Il faut faire attention que les points adiques $\mathrm{Spa}(K, K^+)$ sont des points au sens des topos, mais l'espace topologique a plus d'un point. On pourrait même décrire l'ensemble $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ en termes des classes d'équivalences de points adiques $\mathrm{Spa}(K, K^+)$.

On peut associer des points adiques à chaque $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Pour chaque $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, on peut considérer l'idéal premier $\mathfrak{p}_x = A_{\leq x 0}$ des éléments dont la norme en x s'annule. Cela nous donne une application $\mathrm{supp}\colon \mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Spec}(A)$ et on vérifie aisément qu'elle est continue. Dans le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p}_x)$, on obtient un sous-anneau de valuation V_x et en fait les fibres de supp forment une partie de $\mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p}_x))$.

Définition 8.17. Soient (A, A^+) une paire de Tate et $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Dorénavant, on note $\kappa(x)$ le complété de $\kappa(\mathfrak{p}_x)$ pour la topologie valuative et $\kappa(x)^+$ le complété de V_x. Nous appelons $\kappa(x)$ le *corps résiduel complété* du spectre adique $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ au point x.

Proposition 8.18. *Soit U un sous-ensemble rationnel de $X := \mathrm{Spa}(A, A^+)$, et soit $f : Y := \mathrm{Spa}(B, B^+) \simeq U$ l'homéomorphisme du corollaire 8.15. Fixons un point $y \in Y$ et posons $x = f(y)$. Le morphisme canonique $\varphi : (A, A^+) \to (B, B^+)$ induit un isomorphisme $(\kappa(x), \kappa(x)^+) \simeq (\kappa(y), \kappa(y)^+)$.*

Démonstration. On a $|\cdot(x)| = |\cdot(y)| \circ \varphi$, donc $\varphi^{-1}(\mathrm{supp}(y)) = \mathrm{supp}(x)$, ce qui donne la première affirmation, ainsi que le fait que $\kappa(x)^+$ est l'image réciproque de $\kappa(y)^+$ dans $\kappa(x)$. Pour prouver la seconde affirmation, nous devons montrer que l'image de $\kappa(x)$ dans $\kappa(y)$ est dense pour la topologie valuative, ce qui est évident par construction car un localisé de A est dense dans B. $\square$

Rappelons qu'on a l'application de support $\mathrm{supp}\colon \mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Spec}(A)$. Il s'avère que toute spécialisation de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ se retrouve dedans les fibres.

Proposition 8.19. *Soit (A, A^+) une paire de Tate. Toute spécialisation $x \rightsquigarrow y$ dans $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est verticale, c'est-à-dire, ils appartiennent à la même fibre de* supp*.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathrm{Cont}(A)$ tels que y soit une spécialisation de x et $\mathfrak{p}_x \subsetneq \mathfrak{p}_y$. Il existe $f \in \mathfrak{p}_y \setminus \mathfrak{p}_x$ avec $|f(x)| = \delta$. Comme par continuité, l'enveloppe convexe de $|\varpi(x)|^{\mathbb{Z}}$ coïncide avec Γ_x, alors $|\varpi(x)|^n < \delta$ pour $n \gg 0$ et on en déduit $|f\varpi^{-n}(x)| > 1$, donc $x \notin U(\frac{f, \varpi^n}{\varpi^n})$. Mais on a $y \in U(\frac{f, \varpi^n}{\varpi^n})$, car $|f(y)|$ s'annule, ce qui contredit l'hypothèse $x \rightsquigarrow y$. $\square$

Ensuite, on observe que les chaînes de générisation des spectres adiques admettent un ordre total, une propriété que Fargues désigne par un espace spectrale analytique.

Corollaire 8.20. *Pour tout $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, l'ensemble $\mathrm{Spa}(A, A^+)_x$ s'identifie à $\mathrm{Spa}(\kappa(x), \kappa(x)^+)$. Il est totalement ordonné et s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Convex}(\Gamma_x) \setminus \Gamma_x$ des sous-groupes convexes propres de Γ_x. Son point générique est la seule valuation de rang 1 spécialisant sur x.*

Démonstration. Toute générisation de x dans $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est verticale par la proposition 8.19. Alors, $\mathrm{Spa}(A, A^+)_x$ s'identifie à une partie de $\mathrm{RZ}(\kappa(\mathfrak{p}_x))$. Notons que $f \in V_x$ si et seulement si $x \in R(\frac{f,1}{1})$. En particulier, si $y \rightsquigarrow x$, alors évidemment que $V_x \subset V_y$. On en déduit un plongement $\mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Convex}(\Gamma_x)$ en envoyant y sur le noyau de $\Gamma_x \to \Gamma_y$. Ce noyau est toujours propre car y n'est pas triviale. Réciproquement, si on compose x avec les quotients non triviaux de Γ_x par un convexe, alors on obtient encore un point de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ qui est aussi dans $\mathrm{Spa}(\kappa(x), \kappa(x)^+)$. Lorsque ce quotient est de rang 1, on obtient le point générique de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. $\square$

Dans le cas minimal, on peut même identifier l'adhérence de tout point

Corollaire 8.21. *Pour tout $x \in \mathrm{Spa}(A, A^\dagger)$, son adhérence $\overline{\{x\}}$ s'identifie à $\mathrm{RZ}(\kappa(x)^+/\kappa(x)^{\circ\circ})$ en tant qu'ensemble partiellement ordonné.*

Démonstration. C'est un résultat classique dans Bourbaki que tout anneau de valuation du corps résiduel d'un anneau de valuation se relève uniquement en un sous-anneau de valuation contenant encore l'idéal maximal. En particulier, on voit que la valuation est encore continue, donc cela détermine un point de $\mathrm{Spa}(A, A^\dagger)$. □

8.3. **Spectralité et limite d'éclatements.** L'un des points clés de la théorie est la spectralité de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. On rappelle qu'un espace topologique est spectrale s'il est qcqs, admet une base d'ouverts qc et est sobre (toute composante irréductible admet un et un seul point générique). Une application entre espaces spectraux est spectrale s'elle est continue et qc.

Théorème 8.22 ([Hub94, Lemma 1.5])**.** *Soit* (A, A^+) *une paire de Tate. Alors* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ *est un espace spectral, et les sous-ensembles rationnels sont des ouverts quasi-compacts qui forment une base de la topologie de* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$*.*

En particulier, pour tout morphisme $\varphi\colon (A, A^+) \to (B, B^+)$ de paires de Tate, l'application induite $\mathrm{Spa}(\varphi)\colon \mathrm{Spa}(B, B^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est spectrale.

Il y a deux façons de démontrer ce théorème et on ne fera qu'un esquisse de la première, car elle impliqueraient des détour considérables (on l'a fait dans un premier moment dans le cours par pure bêtise). L'approche à la Huber consiste à démontrer la spectralité de $\mathrm{Spv}(A)$, l'ensemble de toutes les valuations d'un anneau pas forcément de Tate (ou même topologique), en le plongeant dans l'ensemble des relations $\{0, 1\}^{A\times A}$. Munissant ce dernier de la topologie produit (compact de Hausdorff par le théorème de Tychonoff), alors $\mathrm{Spv}(A)$ muni de sa topologie constructible en est un fermé et un critère de Hochster permet d'établir la spectralité. Après, on s'approche de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ par étapes : la première approximation est un sous-ensemble $\mathrm{Spv}(A, A) \subset \mathrm{Spv}(A)$ sans quelques spécialisations appelées horizontales, qui vient muni d'une rétraction $r\colon \mathrm{Spv}(A) \to \mathrm{Spv}(A, A)$ spectrale et reste donc encore spectral ; après on passe à la partie pro-constructible $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ de $\mathrm{Spv}(A, A)$, ce qui donne aussi la spectralité.

L'approche de Fargues, qui généralise un théorème de van der Put–Schneider pour les algèbres affinoïdes et qui ressemble la théorie d'espaces rigides de Raynaud en fonction de leurs modèles formels, consiste à construire une application naturelle de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ vers l'espace topologique de la limite projective en schémas formels des A^+-modèles propres de $\mathrm{Spec}(A)$, à l'aide du critère valuatif de propreté. Il faut montrer que c'est une bijection et même un homéomorphisme. Alors, la spectralité découle du fait bien connu pour les schémas qcqs joint à la stabilité par limite projective le long des applications qc. Cette stratégie est plus adaptée pour les paires de Tate, ce qui explique l'approche diverse de Huber qui travaillait dans un cadre plus général. On va expliquer l'argument dans la suite.

Supposons que (A, A^+) est une paire de Tate et soit ϖ une pseudo-uniformisante. Considérons le diagramme commutative en schémas

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] & X_\eta \arrow[l] \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Spec}(A^+/A^{\circ\circ}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A^+) & \mathrm{Spec}(A) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{8.5}$$

où toutes les flèches verticales sont propres et tous les carrés sont cartésiens. Considérons la limite cofiltrée $X_\infty = \lim X$ indexée par ces A^+-modèles propres de A. Pour un tel $Y \to X$ dans la catégorie d'indexation, son image est fermée et contient le sous-ensemble dense X_η. On en déduit que $|Y| \to |X|$ est surjectif et donc $|Y_s| \to |X_s|$ est surjectif également. Il est bien connu que la catégorie d'indexation admet des sous-catégories cofinales en supposant X sans ϖ-torsion ou même un éclatement. Notons que $|X_{\infty,s}|$ est alors un espace spectral muni d'une application qc surjective vers $|\operatorname{Spec}(A^+/A^{\circ\circ})|$.

On définit maintenant une application

$$\operatorname{Spa}(A, A^+) \longrightarrow |Y_{\infty,s}|. \tag{8.6}$$

Soit $x \in \operatorname{Spa}(A, A^+)$. Il est donné par une paire de Tate (K, K^+) et un morphisme $f : \operatorname{Spec}(K^+) \to X$ tel que l'image de ϖ dans K en soit une pseudo-uniformisante par continuité de la valuation x. Ceci donne un morphisme $\operatorname{Spec}(K) \to Y$ qui s'étend uniquement à $\operatorname{Spec}(K^+)$ par le critère valuatif de propreté. L'image de x est alors définie comme l'image du point fermé de $\operatorname{Spec}(K^+)$ qui tombe forcément sur $|X_s|$. Lorsque X varie, cela définit un élément de $|X_{\infty,s}|$

Théorème 8.23. *L'application précédente* $\operatorname{Spa}(A, A^+) \to |X_{\infty,s}|$ *est un homéomorphisme et donc* $\operatorname{Spa}(A, A^+)$ *est spectral.*

Démonstration. Commençons par l'injectivité. Soient x et y deux éléments distincts de $\operatorname{Spa}(A, A^+)$. Il existe $a, b \in A$ tels que $|a(x)| \geq |b(x)|$ et $|a(y)| < |b(y)|$. Choisissons $n \geq 1$ tel que $|\varpi(y)|^n \leq |a(y)|$, ce qui est possible par hypothèse. Soit $X = \operatorname{Bl}_I(A^+)$ l'éclatement de l'idéal $I = (a, b, \varpi^n)$ qui est un isomorphisme en dehors de ϖ. Soit $U \subset Y$ la charte affine ouverte d'anneau $A^+[ba^{-1}, \varpi^n a^{-1}]$. Alors, l'image du point fermé de $\operatorname{Spec}(\kappa(x)^+)$ est dans U, tandis que $\operatorname{Spec}(\kappa(y)^+)$ ne tombe totalement sur U. Puisque tous les points de $\operatorname{Spec}(\kappa(x)^+)$ sont des généralisations de son point fermé, l'image de ce dernier ne tombe par sur U. Cela démontre l'injectivité.

Pour la surjectivité, on voit grâce aux éclatements que les anneaux locaux complets de X_∞ pour la topologie ϖ-adique n'ont que des idéaux principaux totalement ordonnés par l'inclusion, donc ils sont des anneaux de valuation ϖ-adiquement complets. Le morphisme $A^+ \to \widehat{\mathcal{O}}_{X_\infty,x}$ définit ainsi un point de $\operatorname{Spa}(A, A^+)$. Cela prouve que l'application de l'énoncé est surjective.

Il nous reste à vérifier que c'est un homéomorphisme. Si $X = \operatorname{Bl}_I(A^+)$ est l'éclatement d'un idéal ouvert $I = (f_0, \ldots, f_n) \subset A^+$, alors remarquons que l'espace projectif provient d'une algèbre graduée engendré en degré 1, donc une base de la topologie de Y est formée par les intersections dees chartes affines ouvertes U_i de la forme $\operatorname{Spec}(A^+[f_j f_i^{-1}]_{j \neq i})$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. Mais le morphisme $\operatorname{Spec}(K^+) \to \operatorname{Spec}(A^+)$ se factorise par U_i si et seulement si l'image de I dans V est engendrée par f_i. Cela signifie que $|f_j(x)| \leq |f_i(x)|$ lorsque $j \neq i$ et donc que x appartient à $R(\frac{f_j}{f_i})$. Renormalisant par des puissances de ϖ et faisant Y varier, cela nous donne tous les ensembles rationnels. $\square$

Proposition 8.24 ([Hub93, Lemma 3.3])**.** *Soit* (A, A^+) *une paire de Tate. Alors, on a*

$$A^+ = \cap_{x \in \operatorname{Spa}(A, A^+)} A_{\leq_x 1}. \tag{8.7}$$

Il est clair que A^+ est contenu dans le membre de droite. Si $a \in A \setminus A^+$, il faut trouver $x \in \operatorname{Spa}(A, A^+)$ tel que $|a(x)| > 1$. Il y a deux méthodes pour le faire. La première option à la Huber est de chercher à tâtons un anneau de valuation dans un corps résiduel de A contenant l'image de a^{-1} dans son idéal maximal. Cette valuation n'est pas forcément continue, mais la procédure de spécialisation horizontale fournit une valuation continue remplissant les contraintes souhaitées. La deuxième option suivant Fargues est d'interpréter $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ en termes de la limite d'éclatements X_∞ pour forcer l'intégralité souhaitée.

Démonstration. Pour tout éclatement $X \to \mathrm{Spec}(A^+)$ en fibre spéciale, on a forcément $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$, car les sections globales forment une extension finie de l'anneau intégralement clos A^+ avec même corps de fraction. Passant à la limite qui commute avec f_*, on a que $H^0(X_\infty, \mathcal{O}_X) = A^+$. On a déjà vu que les points (K, K^+) s'interprètent en termes des anneaux locaux ϖ-adiquement complets de X_∞. Ainsi, on voit que $|a(x)| \leq 1$ pour un certain $a \in A$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert de X_∞ dont a est une section. Mais alors si cela est valable pour tout $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, on voit que a devient une section globale de X_∞ et donc appartient à A^+. $\square$

À tout point $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est associé un morphisme $\mathrm{Spec}(\kappa(x)^+) \to \mathrm{Spec}(A^+)$. On note $\mathrm{sp}(x) \in \mathrm{Spec}(A^+/A^{\circ\circ})$ l'image du point fermé de $\mathrm{Spec}(\kappa(x)^+)$.

Proposition 8.25. *L'application de spécialisation* $\mathrm{sp} : \mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Spec}(A^+/A^{\circ\circ})$ *est une application continue quasi-compacte spécialisante surjective entre espaces spectraux.*

Démonstration. Pour $f \in A^+$ d'image $\bar{f}$ dans A^+/ϖ, on a

$$\mathrm{sp}^{-1}(D(\bar{f})) = \{x \in \mathrm{Spa}(A, A^+) \mid |f(x)| = 1\}. \tag{8.8}$$

On en déduit que sp est continue quasi-compacte. La surjectivité et le fait que ce soit spécialisant se déduit du théorème identifiant le spectre adique avec $|X_{\infty,s}|$ puisque les applications de transition dans la limite projective sont surjectives et spécialisantes. $\square$

Corollaire 8.26. *Soit* (A, A^+) *une paire de Tate non nulle. Alors,* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ *n'est pas vide.*

Démonstration. Par la surjectivité de l'application de spécialisation, si A est de Tate alors $\mathrm{Spa}(A, A^+) = \emptyset$ si et seulement si $\mathrm{Spec}(A^+/\varpi) = \emptyset$. Mais cela équivaut à $\varpi \in (A^+)^\times$ et que $\varpi^{-1} \in A^\circ$ et donc on trouve $\varpi^{\mathbb{Z}}$ dans un seul anneau de définition $A_0 \subset A$. Ceci est nettement absurde, car A_0 est censé être ϖ-adiquement complet. $\square$

Corollaire 8.27. *Soit* (A, A^+) *une paire de Tate et* $a \in A$. *Alors,* $a \in A^\times$ *si et seulement si* $|a(x)| > 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$.

Démonstration. L'implication directe se voit aisément. Si $|a(x)| > 0$, alors le spectre de la paire quotient $(A/a, (A/a)^+)$ est vide, donc l'anneau A/a s'annule d'après le corollaire précédent, et $a \in A^\times$. $\square$

9. Spectre de la boule unité fermée

Dans cette section, on décrit le spectre adique de l'algèbre de Tate $T_1(K)$ pour un corps non-archimédien K. Ceci a plutôt était fait en travaux dirigés, mais quand même c'est assez joli d'avoir cela dans les notes. Est-ce qu'on pourrait aussi écrire les points en prenant tous les éclatements de $K^\circ\langle X\rangle$ (ou même l'anneau de polynômes qui y est dense) ? Ce serait assez chouette de le faire, mais je le laisserai pour un autre jour (voire semaine, mois, année, décennie, siècle), car je trouve plus important de préparer la suite.

Soit K un corps non archimédien complet et algébriquement clos, et notons sa valuation de rang 1 par $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nous notons le corps résiduel k. Soit $A = K\langle X\rangle$ et

$A^+ = A^\circ = K^\circ\langle X\rangle$. Les points de $X := \mathrm{Spa}(A, A^+)$ sont habituellement divisés en 5 types :

(1) Points classiques : Soit $x \in K^\circ$. Alors l'application $A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f \mapsto |f(x)|$ est un élément de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, et son support est l'idéal maximal $(t - x)$ de A. Nous noterons souvent ce point par x. Notez que tout idéal maximal de A est de la forme $(t - x)$ pour $x \in K^\circ$, donc les points classiques sont en bijection avec $\mathrm{Sp}(A)$.

(2–3) Points de Gauss des disques de rayon r. Soit $0 < r \leq 1$ réel et soit $x \in K^\circ$. Soit x_r le point de $\mathrm{Spv}(A)$ correspondant à la valuation

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n (X - x)^n \mapsto \sup_{n\geq 0} |a_n| r^n = \sup_{|y-x|\leq r} |f(y)|. \tag{9.1}$$

Alors $x_r \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, et il ne dépend que de $D(x, r) := \{y \in K^\circ \colon |x - y| \leq r\}$. Si on admettait $r = 0$ alors $x_r = x$ serait un point classique. Si $r = 1$ alors x_r est indépendant de x et est appelé la *norme de Gauss*. Si $r \in |K^\times|$, on dit que le point x_r est de type (2) ; sinon, on dit qu'il est de type (3).

(4) Soit $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ une suite infinie de disques fermés dans K° telle que $\bigcap_{n\geq 1} D_n = \varnothing$. De telles suites existent si et seulement si k n'est pas sphériquement complet (comme $\mathbb{C}_p$, pour en donner un exemple). Alors la valuation

$$f \mapsto \inf_{n\geq 1} \sup_{x\in D_n} |f(x)| \tag{9.2}$$

définit un point de rang 1 de X, qui n'est pas de type (1), (2) ou (3).

(5) Valuations de rang 2 : Soit $x \in K^\circ$ et $r \in]0, 1]$. Nous notons par $\Gamma_{<r}$ le groupe abélien $\mathbb{R}_{>0} \times \gamma^{\mathbb{Z}}$, muni de l'unique ordre tel que $r' < \gamma < r$ pour tout $r' < r$. Notons $x_{<r}$ le point de $\mathrm{Spv}(A)$ correspondant à la valuation

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n (X - x)^n \mapsto \max_{n\geq 0} |a_n| \gamma^n \in \Gamma_{<r} \cup 0. \tag{9.3}$$

Alors $x_{<r}$ est un point de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, et il ne dépend que de $D^0(x, r) := \{y \in K^\circ \mid |x - y| < r\}$. De même, si $r \in]0, 1[$, soit $\Gamma_{>r}$ le groupe abélien $\mathbb{R}_{>0} \times \gamma^{\mathbb{Z}}$, muni de l'unique ordre tel que $r' > \gamma > r$ pour tout $r' > r$. Notons $x_{>r}$ le point de $\mathrm{Spv}(A)$ correspondant à la valuation

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n (X - x)^n \mapsto \max_{n\geq 0} |a_n| \gamma^n \in \Gamma_{>r} \cup 0. \tag{9.4}$$

Alors $x_{>r}$ est un point de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, et il ne dépend que de $D(x, r)$. (Ainsi $x_{>r} = x'_{>r}$ si $x_r = x'_r$). Si $r \notin |K^\times|$, alors $x_{<r} = x_{>r} = x_r$. Mais si $r \in |K^\times|$, nous obtenons deux nouveaux points de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, appelés points de type (5).

Si l'on voit $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ comme un arbre, alors les points de type (1) sont des points terminaux (feuilles), les points de type (2) et (3) sont des points sur les branches de l'arbre (les points de type (2) sont exactement les points de ramification), et les points de type (4) sont des « cul-de-sac ». Les points de type (5) sont dans l'adhérence des points de type (2) (ils sont donc moins faciles à visualiser). Les points de type (1), (3), (4) et (5) sont fermés. Si $x \in K^\circ$ et $r \in |K^\times| \cap (0, 1]$, alors l'adhérence du point de type (2) correspondant x_r est $\{x_r, x_{<r}, x_{>r}\}$ (où $x_{>r}$ n'apparaît que si $r < 1$).

Remarque 9.1. Nous aurions également pu définir un point $x_{>1}$ de $\mathrm{Spv}(A)$, pour $x \in K^\circ$. C'est une valuation continue sur A, mais ce n'est pas un point de $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$, car elle n'est pas ≤ 1 sur A°. En fait, si $A^\dagger$ est la clôture intégrale de $K^\circ + A^{\circ\circ}$ dans A, alors $\mathrm{Spa}(A, A^\dagger) = \mathrm{Spa}(A, A^\circ) \cup \{x_{>1}\}$.

On obtient l'espace de Berkovich de A en identifiant les points de type (5) $x_{<r}$ et $x_{>r}$ avec x_r. Ceci se décrit plus généralement comme le quotient de Hausdorff maximal du spectre adique.

10. Faisceaux de structure et acyclicité

Dans cette section, on va enfin définir les espaces adiques dans le cadre stablement uniforme et les faisceaux de structure $\mathcal{O}_X$ qui y sont associés.

10.1. Stablement uniforme.

Définition 10.1. Un anneau de Tate A est dit *uniforme* si A° est borné dans A. Il est dit *stablement uniforme* si toute localisation rationnelle B de A est uniforme.

Remarquons que cela équivaut au fait que A° est un anneau de définition de A. On peut montrer qu'un anneau de Tate complet uniforme est réduit.

Lemme 10.2. *Soit A un anneau de Tate uniforme. Alors, A est réduit.*

Démonstration. Le radical nilpotent de A est un idéal, donc stable par multiplication par ϖ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En même temps, tout élément nilpotent est aussi topologiquement nilpotent, donc ce radical est contenu dans $A^{\circ\circ}$ et a fortiori dans A_0. Mais l'intersection $\cap_n \varpi^n A_0$ s'annule car A est complet. $\square$

On veut montrer que pour les stablement uniformes, alors les les idéaux de $T_n(A)$ dont les quotients induisent des localisés rationnels sont déjà fermés. On rappelle que le spectre de Berkovich $\mathcal{M}(A)$ paramètre tous les valuations réelles continues de A et qu'il s'identifie au quotient de Hausdorff maximal. Il vient muni d'un plongement $\kappa \colon \mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}^A$ donné par $\kappa(x) = (|a(x)|)_{a \in A}$ pour la normalisation $|\varpi(x)| = p^{-1}$, qui est donc canonique au choix de la pseudo-uniformisante ϖ près. Par dualité, on a aussi un morphisme $\lambda \colon A \to \mathbb{R}^{\mathcal{M}(A)}$ donné par $\lambda(a) = (|a(x)|)_{x \in \mathcal{M}(A)}$. Cela permet de définir une semi-norme supremum $|a|_{\sup} := \|\lambda(a)\|_{\sup}$ qui est même une norme quand A est uniforme, comme on vérifie ci-dessous.

Lemme 10.3. *Soit A un anneau de Tate uniforme. Alors, $|\cdot|_{\sup}$ définit une norme sur A, dont la topologie induite coïncide avec celle de A.*

Démonstration. Notons que l'ensemble des $a \in A$ tel que $|a|_{\sup} < 1$ est enserré entre $A^{\circ\circ}$ et A° : en effet, $A^{\circ\circ}$ en est contenu ; réciproquement si $a \in A$ satisfait à $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathcal{M}(A)$, alors cette inégalité reste vraie pour toute spécialisation dans $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$, car l'ensemble rationnel $R(\frac{1}{a})$ est ouvert, donc on en déduit que $a \in A^\circ$. Ce dernier est un anneau de définition, et on obtient un système de nilvoisinages fondamentaux induit par $|\cdot|_{\mathrm{sp}}$ en multipliant par des puissances de ϖ. Alors, la topologie de la semi-norme supremum coïncide avec la topologie de Tate sur A. En particulier, si $|a|_{\sup}$ s'annule, on conclut que a s'annule aussi, vu que A est complet et donc séparé. $\square$

A fortiori, il s'ensuit aussi que, pour A de Tate uniforme, alors $|a|_{\sup} \leq 1$ si et seulement si $a \in A^\circ$, vu que cette norme permet de savoir si l'ensemble des puissances de a est borné. Dans le cas uniforme, le calcul décisif est de montrer que les injections de modules topologiques suivantes sont strictes (c'est à dire, la topologie quotient et sous-espace sur l'image).

Lemme 10.4. *Supposons que A est uniforme. Soit $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in T_1(A)$ tel que les a_n engendrent l'idéal unité. Alors la multiplication par g définit un endomorphisme stricte de $T_1(A)$.*

Démonstration. Considérons $x \in \mathcal{M}(A)$ normalisé par $|\varpi(x)| = p^{-1}$, et notons $\tilde{x}$ la norme de Gauss sur $T_1(A)$. Alors, $\tilde{x}$ récupère la norme supremum sur $T_1(\kappa(x))$. On peut alors calculer la norme spectrale sur $T_1(A)$ ci-dessus comme le supremum des $\tilde{x}$ lorsque x parcourt $\mathcal{M}(A)$. Choisissons $n \geq 0$ tel que $a_0, \ldots, a_n$ engendrent l'idéal unité dans A. Alors, on peut trouver toute puissance de ϖ assez élevée dans le idéal de A° engendré par les a_i. Utilisant on recouvrement standard rationnel, on voit alors que la quantité

$$c := \inf_{x \in \mathcal{M}(A)} \max\{|a_0(x)|, \ldots, |a_n(x)|\} \tag{10.1}$$

est strictement positive. Pour tout $h \in T_1(A)$, on a alors

$$|gh|_{\sup} = \sup_{x \in \mathcal{M}(A)} \{|(gh)(\tilde{x})|\} = \sup_{x \in \mathcal{M}(A)} \{|g(\tilde{x})||h(\tilde{x})|\} \geq c|h|_{\sup} \tag{10.2}$$

car les normes de Gauss sont multiplicatives. En particulier, on voit que les normes dans l'image et le quotient sont équivalentes, ce qui démontre l'assertion. □

Un corollaire décisif de ce travail est l'acyclicité d'un certain complexe de Čech pour le recouvrement le plus simple possible.

Lemme 10.5. *Soient A uniforme et $f \in A$. Alors le complexe de Čech*

$$0 \to A \to A\langle f \rangle \oplus A\langle f^{-1} \rangle \to A\langle f^{\pm} \rangle \to 0 \tag{10.3}$$

associé au recouvrement de Laurent binaire $\{R(f), R(f^{-1})\}$ est exact.

Démonstration. Par hypothèse, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (f-X)A\langle X \rangle \oplus (1-fX^{-1})A\langle X^{-1} \rangle & \longrightarrow & (f-X)A\langle X^{\pm} \rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A\langle X \rangle \oplus A\langle X^{-1} \rangle & \longrightarrow & A\langle X^{\pm} \rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A & \longrightarrow & A\langle f \rangle \oplus A\langle f^{-1} \rangle & \longrightarrow & A\langle f^{\pm} \rangle & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{10.4}$$

dans lequel les trois colonnes, ainsi que les deux premières lignes, sont exactes et strictes, où on utilise le Lemma 10.3 pour savoir que les inclusions sont strictes. Par chasse au diagramme, ou en appliquant le lemme du serpent aux deux premières lignes, on en déduit l'assertion. □

Un autre corollaire est le comportement suivant des localisations rationnelles.

Corollaire 10.6. *Soit A de Tate et stablement uniforme. Alors, pour toute localisation rationnelle B, le noyau de $T_n(A) \to B$ est engendré par $gX_i - f_i$.*

Démonstration. Il faut écrire la localisation rationnelle B en tant que composée successive

$$B := A\langle \tfrac{f_1,\dots,f_n}{g} \rangle = A\langle \tfrac{\varpi^N}{g} \rangle \langle f_1 g^{-1} \rangle \dots \langle f_n g^{-1} \rangle \tag{10.5}$$

où $N \gg 0$ est assez grand pour que $\varpi^N = \sum h_i f_i$ avec $h_i \in A^\circ$, ce qui montre que $\frac{\varpi^N}{g} \in B^\circ$. Notons $A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n$ la suite des localisations rationnelles ci-dessus. Comme A est stablement uniforme, chacun des A_i est uniforme. On voit que le noyau de $T_1(A) \to A_0$ est donné par $gY - \varpi^N$ car les coefficients engendré l'idéal unité de A. De même, on montre que le noyau de $A_{i-1} \to A_i$ est engendré par $Z_i - f_i g^{-1}$. Alors, l'application $T_{n+1}(A) \to T_n(A)$ donnée par $Z_i \to X_i$ et $Y \mapsto \sum h_i X_i$ permet d'identifier le noyau de $T_n(A) \to B$ avec l'idéal engendré par les $gX_i - f_i$. □

10.2. **Acyclicité.** Soit $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ le spectre adique d'une paire de Tate. On a un site rationnel sur $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ consistant de toutes les localisations rationnelles $Y := \mathrm{Spa}(B, B^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Alors on définit un pré-faisceaux $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ sur ce site par $Y \mapsto (B, B^+)$: ceci est bien défini grâce à la propriété universelle des localisations rationnelles qui induisent des applications de transition.

Théorème 10.7 (Buzzard–Verberkmoes [BV18])**.** *Soit (A, A^+) une paire de Tate stablement uniforme, et soit $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Alors $\mathcal{O}_X$ est un faisceau et, pour tout domaine rationnel U de X et tout $i \geq 1$, on a $H^i(U, \mathcal{O}_X) = 0$.*

La stratégie de la preuve consiste à raffiner des recouvrements finis pour se ramener au complexe de Čech exact qu'on a calculé dans la sous-section précédente. Pour cela, on a besoin de ce résultat déduit d'une suite spectrale.

Proposition 10.8. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux recouvrements de X tels que $\mathcal{U} \times_X V_{j_0 \dots j_q}$ et $U_{i_0 \dots i_p} \times_X \mathcal{V}$ soient $\mathcal{O}$-acycliques. Alors, $\mathcal{U}$ est $\mathcal{O}$-acyclique si et seulement s'il en est le même de $\mathcal{V}$.*

Démonstration. Il faut définir le double complexe de Čech associé à deux recouvrements et regarder la suite spectrale associée. Les hypothèses d'acyclicité données induisent une dégénération en deuxième page. □

Corollaire 10.9. *Soit $\mathcal{V}$ un raffinement $\mathcal{O}$-acyclique de $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{V} \times_X U_{i_0 \dots i_p}$ soit $\mathcal{O}$-acyclique. Alors, $\mathcal{U}$ est aussi $\mathcal{O}$-acyclique.*

Démonstration. On vérifie les preuves de la Corollary 10.9 en voyant que $\mathcal{U} \times_X V_{j_0 \dots j_q}$ et le recouvrement trivial se raffinent l'un à l'autre. □

On peut déjà démontrer l'acyclicité des complexes de Čech associés à un recouvrement de Laurent $\mathcal{U}$ en appliquant le lemme suivant.

Corollaire 10.10. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des recouvrements de X. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V} \times_X (U_{i_0\ldots i_p})$ sont $\mathcal{O}$-acycliques, alors il en est de même pour $\mathcal{U} \times_X \mathcal{V}$.*

Démonstration. L'hypothèse du Corollary 10.10 est immédiatement vérifiée en voyant que $\mathcal{U} \times_X \mathcal{V}$ est un recouvrement de $\mathcal{U}$ qui devient $\mathcal{O}$-acyclique après couper avec toute intersection $U_{i_0\ldots i_p}$. □

Définition 10.11. Le *recouvrement de Laurent* associé à $f_0, \ldots, f_n$ est le recouvrement donné par les produits fibrés

$$\left(R\left(\frac{f_0}{1}\right), R\left(\frac{1}{f_0}\right)\right) \times_X \ldots \times_X \left(R\left(\frac{f_n}{1}\right), R\left(\frac{1}{f_n}\right)\right) \tag{10.6}$$

Corollaire 10.12. *Les recouvrements de Laurent sont acycliques.*

Démonstration. Cela se réduit au cas $n = 0$ grâce à l'un des corollaires des suites spectrales. Lorsque $n = 0$, on avait déjà montré l'acyclicité à la main. □

Le prochain type de recouvrement qui mérite notre attention est le standard :

Définition 10.13. Pour $f_0, \ldots, f_n \in A$ engendrant l'idéal unité, les sous-ensembles rationnels

$$R\left(\frac{f_0, \ldots, f_n}{f_i}\right) \qquad (i = 0, \ldots, n) \tag{10.7}$$

forment un recouvrement de X, appelé le *recouvrement rationnel standard* défini par les paramètres $f_0, \ldots, f_n$.

Maintenant, on va démontrer que les recouvrements rationnels standards sont acycliques.

Lemme 10.14. *Pour tous $f_0, \ldots, f_n \in A$ engendrant A comme idéal, il existe un recouvrement de Laurent $\mathcal{V}$ de* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ *tel que pour tout $V \in \mathcal{V}$, l'intersection du recouvrement rationnel engendré par $f_1, \ldots, f_n$ avec V peut être raffiné en un recouvrement de Laurent.*

Démonstration. Soit ϖ un pseudo-uniformisant. Il existe N assez grand tel que $\varpi^N \in A^+ f_0 + \cdots + A^+ f_n$. On en déduit que $\max\{|f_i(x)|\} > |\varpi^{N+1}(x)|$ pour tout $x \in X$, et après renormalisation on peut supposer $\max\{|f_i(x)|\} > 1$. Soit maintenant $\mathcal{U}$, resp. $\mathcal{V}$ le recouvrement rationnel standard, resp. de Laurent associé à $f_0, \ldots, f_n$. Pour chaque élément V de $\mathcal{V}$,

$$V = \bigcap_{i \notin I} X\left(\frac{f_i}{1}\right) \cap \bigcap_{i \in I} X\left(\frac{1}{f_i}\right) \tag{10.8}$$

avec $I \subset \{0, \ldots, n\}$ non vide (sinon V serait vide). Alors, le recouvrement rationnel $V \cap \mathcal{U}$ est raffiné par le recouvrement de Laurent associé à $(f_i f_j^{-1})_{i,j \in I}$. □

Corollaire 10.15. *Les recouvrements rationnels standard sont acycliques pour $\mathcal{O}_X$.*

Démonstration. Alors, soit $\mathcal{U}$ un tel recouvrement. On trouve un recouvrement de Laurent $\mathcal{V}$ (ceux-là sont stables par intersection) tel que $\mathcal{U} \cap V$ admet un refinement par un autre recouvrement de Laurent $\mathcal{W}_V$. En particulier, vu que $\mathcal{W}_V$ est $\mathcal{O}$-acyclique, on en déduit $\mathcal{U} \cap V$ est $\mathcal{O}$-acyclique par l'un des corollaires de la suite spectrale du double complexe. Donc, comme $\mathcal{V}$ est $\mathcal{O}$-acyclique, on voit qu'il en est de même pour $\mathcal{U}$. □

Pour finir, il faut juste démontrer le lemme suivant.

Lemme 10.16. *Tout recouvrement d'un sous-ensemble rationnel de X peut être raffiné par un recouvrement rationnel standard.*

Démonstration. Par transitivité des parties rationnelles, on se ramène aux recouvrements de X lui-même. Puisque X est quasi-compact, on peut partir d'un recouvrement fini $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ de X par des sous-espaces rationnels. Pour $i \in I$, écrivons

$$V_i = R\left(\frac{f_{i1}, \ldots, f_{in_i}}{g_i}\right) \qquad (i \in I) \tag{10.9}$$

pour certains $f_{i1}, \ldots, f_{in_i}, g_i$ qui engendrent l'idéal unité dans A. Soit S l'ensemble des produits $\prod_{i \in I} s_i$ avec $s_i \in \{f_{i1}, \ldots, f_{in_i}, g_i\}$ et $s_i = g_i$ pour au moins un $i \in I$. Ces éléments engendrent également l'idéal unité : pour le voir, il suffit grâce au fait que le spectre n'est pas vide que si l'anneau est nul, de vérifier que pour chaque $x \in X$ il existe un certain $s \in S$ pour lequel $|s(x)| \neq 0$. Pour ce faire, choisissons un indice $i \in I$ tel que $x \in V_i$, posons $s_i = g_i$, et pour chaque $j \neq i$ choisissons $s_j \in \{f_{j1}, \ldots, f_{jn_j}, g_j\}$ pour maximiser $|s_j(x)|$. Puisque $f_{j1}, \ldots, f_{jn_j}, g_j$ engendrent l'idéal unité, on doit avoir $|s_j(x)| \neq 0$; il s'ensuit que $|s(x)| \neq 0$. On peut ainsi former le recouvrement standard par S. Celui-ci raffine le recouvrement original : si $s \in S$ avec $s_i = g_i$, alors $R\left(\frac{S}{s}\right) \subseteq V_i$. $\square$

10.3. **Espaces adiques.** Notons que la catégorie des ouverts rationnels forme un site et l'on peut parler de faisceaux sur ce site.

Définition 10.17. On dit que la paire (A, A^+) est *faisceautique* si le préfaisceau $\mathcal{O}_X$ sur les ouverts rationnels de $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est un faisceau d'anneaux topologiques sur $\mathrm{Spa}(A, A^+)$

Si c'est le cas, on définit pour tout ouvert U, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ comme la limite projective des $\mathcal{O}_X(V)$ en anneaux topologiques, où V parcourt les parties rationnelles de U. On vient de montrer que toute paire de Tate stablement uniforme est faisceautique.

Définition 10.18. La catégorie des espaces localement v-topologiquement annelés est la catégorie des triplets $(X, \mathcal{O}_X, (v_x)_{x \in X})$ tels que

(1) X est un espace topologique,
(2) $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux topologiques tel que pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local,
(3) v_x est une valuation sur le corps résiduel $k(x)$ de $\mathcal{O}_{X,x}$,

avec pour morphismes ceux d'espaces localement annelés $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ satisfaisant :

(1) pour tout ouvert V de Y, le morphisme $f^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ est continu,
(2) pour tout $x \in X$, le morphisme $k(f(x)) \to k(x)$ est compatible avec v_x et $v_{f(x)}$.

La catégorie des espaces adiques est la sous-catégorie de la précédente qui sont localement isomorphes à $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ avec (A, A^+) une paire de Tate faisceautique.

La raison pour laquelle cette définition a du sens est qu'on a le résultat suivant de fidélité pleine :

Proposition 10.19. *Soient* (A, A^+) *et* (B, B^+) *des paires de Tate faisceautiques. Alors* $\varphi \mapsto \mathrm{Spa}(\varphi)$ *induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}((A, A^+), (B, B^+)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spa}(B, B^+), \mathrm{Spa}(A, A^+)), \tag{10.10}$$

où le premier Hom *est pris dans la catégorie des paires de Tate et le second dans celle des triplets d'espaces localement v-topologiquement annelés.*

Démonstration. Réciproquement, soit $f : Y \to X$ un morphisme dans $\mathcal{V}$, et soit $\varphi : A \to B$ l'application induite en sections globales. Nous voulons montrer que $f = \mathrm{Spa}(\varphi)$. Soit $U = R\left(\frac{T}{s}\right)$ un domaine rationnel dans X, et soit $V = f^{-1}(U)$. On a

$$V = \{y \in Y : \forall t \in T,\ |t(f(y))| \leq |s(f(y))| \neq 0\} = \{y \in Y : \forall t \in T,\ |\varphi(t)(y)| \leq |\varphi(s)(y)| \neq 0\}, \tag{10.11}$$

par compatibilité avec les valuations Si W est un ouvert quasi-compact de V, alors on peut trouver $N \gg 0$ tel que $|\varpi(y)|^N \leq |\varphi(s)(y)$ pour tout $y \in W$. On a alors

$$W \subset W_0 := R\left(\frac{\varphi(T), \varpi^N}{\varphi(s)}\right) \subset V, \tag{10.12}$$

de sorte que l'application $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(W)$ induite par f se factorise par $\mathcal{O}_Y(W_0) = B\left\langle \frac{\varphi(T), \varpi^N}{\varphi(s)} \right\rangle$. On sait que cet homomorphisme est égal à φ sur un localisé de A et donc partout en complétant

En passant à la limite sur les $W \subset V$ ouverts quasi-compacts, on voit que les homomorphismes $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$ associés à f et $\mathrm{Spa}(\varphi)$ coïncident □

11. Perfectoïdes

Dans cette section, on va discuter finalement la notion des perfectoïdes et leurs propriétés fondamentales.

11.1. **Propriétés basiques et basculés.**

Définition 11.1. Un anneau perfectoïde A est un anneau de Tate uniforme tel qu'il existe une pseudo-uniformisante ϖ satisfaisant $\varpi^p \mid p$ et tel que le Frobenius Frob : $A^\circ/\varpi \to A^\circ/\varpi^p$ est un isomorphisme. Une paire perfectoïde est un paire de Tate (A, A^+) tel que A est perfectoïde.

Pour A un anneau perfectoïde, puisque $p \in A^{\circ\circ}$, A est automatiquement une $\mathbb{Z}_p$-algèbre qui est séparée complète pour la topologie p-adique.

Exemple 11.2. (1) Soit K le complété d'une extension algébrique arithmétiquement profinie de $\mathbb{Q}_p$, par exemple galoisienne de degré infini dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique comme $\mathbb{Z}_p^\times$. Alors, le résultat principal de Fontaine–Wintenberger affirme que K est un corps perfectoïde. C'est par exemple le cas pour $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ ou $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$.

(2) Si K est un corps non archimédien complet algébriquement clos, alors K est perfectoïde.

(3) Tout corps non archimédien parfait complet de caractéristique p, comme $\mathbb{F}_p(\!(T^{1/p^\infty})\!)$.

(4) Si K est un corps perfectoïde, alors $K\langle X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_d^{1/p^\infty}\rangle$, le complété pour la norme de Gauss de la K-algèbre $\bigcup_{n\geq 0} K\langle X_1^{1/p^n}, \dots, X_d^{1/p^n}\rangle$, est perfectoïde.

(5) Plus généralement, si A est perfectoïde et I un ensemble fini, considérons $A\langle X_i^{1/p^\infty}\rangle_{i\in I}$, c'est-à-dire $A^\circ\langle X_i^{1/p^\infty}\rangle_{i\in I}\big[\frac{1}{\varpi}\big]$ où ϖ est un pseudo-uniformisant de A et $A^\circ\langle X_i^{1/p^\infty}\rangle_{i\in I}$ est le complété ϖ-adique de

$$A^\circ\big[X_i^{1/p^\infty}\big]_{i\in I} = \bigcup_{n\geq 0} A^\circ\big[X_i^{1/p^n}\big]_{i\in I}. \tag{11.1}$$

C'est un anneau perfectoïde avec $A\langle X_i^{1/p^\infty}\rangle_{i\in I}^\circ = A^\circ\langle X_i^{1/p^\infty}\rangle_{i\in I}$.

(6) Si A est un anneau perfectoïde et P un espace topologique profini, alors $\mathcal{C}(P,A) =$ est perfectoïde avec $\mathcal{C}(P,A)^\circ = \mathcal{C}(P,A^\circ)$.

Lemme 11.3. *Soit un anneau perfectoïde A muni d'une pseudo-uniformisant ϖ satisfaisant $\varpi^p \mid p$. Alors, l'injectivité de $A^\circ/\varpi \to A^\circ/\varpi^p$ est automatique et le Frobenius $A^\circ/p \to A^\circ/p$ est surjectif. En particulier, la notion d'anneau perfectoïde ne dépend pas du choix de ϖ.*

Démonstration. Le premier point se déduit du fait que A° est intégralement fermé dans A. En effet, si $(a\varpi^{-1})^p \in A^\circ$, alors on peut trouver toute puissance de $a\varpi^{-1}$ dans un nombre fini de translatés de A°, ce qui est donc borné. Pour la surjectivité, soit ϖ tel que $\varpi^p \mid p$ et $\mathrm{Frob} : A^\circ/\varpi \to A^\circ/\varpi^p$ soit bijectif. Il suffit de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, le morphisme $\mathrm{Frob} : A^\circ/(p,\varpi^n) \to A^\circ/(p,\varpi^{pn})$ est surjectif. Le cas $n = 1$ est immédiat. Si maintenant $a \in A^\circ$ satisfait $a = b^p + \lambda p + \mu\varpi^{pn}$ avec $\lambda, \mu \in A^\circ$, écrivons $\mu = c^p + \nu\varpi^p$. On obtient

$$a = b^p + (c\varpi^n)^p + \lambda p + \nu\varpi^{p(n+1)}, \tag{11.2}$$

qui est congru à $(b + c\varpi^n)^p$ modulo $(p, \varpi^{p(n+1)})$. Quant à la dernière assertion, les deux fait montré précédemment entraînent déjà que $A^\circ/\varpi \to A^\circ/\varpi^p$ est bijective. $\square$

En caractéristique p, la propriété d'être uniforme est automatique.

Proposition 11.4. *Toute $\mathbb{F}_p$-algèbre de Tate parfaite est perfectoïde (et vice-versa).*

Démonstration. Soit A une $\mathbb{F}_p$-algèbre perfectoïde. On utilise le **??** pour déduire que, pour tout $n \geq 1$, le frobenius $A^\circ/\varpi^n \xrightarrow{\sim} A^\circ/\varpi^{pn}$ est bijectif. En passant à la limite projective lorsque $n \geq 1$ varie, on en déduit que A°, et donc A, est parfait.

Réciproquement, soit A une $\mathbb{F}_p$-algèbre de Tate parfaite. Soit A_0 un anneau de définition de A et $\varpi \in A_0$ une pseudo-uniformisante. Le Frobenius $\mathrm{Frob} : A \xrightarrow{\sim} A$ est une application surjective d'espaces de Banach sur $\mathbb{F}_p(\!(\varpi^{1/p^\infty})\!)$. Par le théorème de l'application ouverte de Banach, $\varpi^N A_0 \subset A_0^p$ pour un certain $N \gg 0$. Ainsi, $A_0^{1/p} \subset \varpi^{-N/p} A_0$. Par récurrence, on en déduit que

$$A_0^{1/p^k} \subset \varpi^{-N\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^k}\right)} A_0. \tag{11.3}$$

On en déduit que A_0^{1/p^∞}, la perfection de A_0 dans A, est borné. On peut donc supposer, quitte à remplacer A_0 par sa perfection, que A_0 est parfait. Maintenant, si $a \in A^\circ$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $k \geq 0$, $a^{p^k} \in \varpi^n A_0$, et donc, puisque A_0 est parfait, $a \in \varpi^{\frac{n}{p^k}} A_0$. Ceci étant vrai pour tout $k \geq 0$, on en déduit que $a \in \varpi^{-1} A_0$. Ainsi, $A^\circ \subset \varpi^{-1} A_0$ et est donc borné. On en déduit que A est uniforme, et il est immédiat de conclure que A est perfectoïde. $\square$

Définition 11.5. Soit A un anneau perfectoïde et posons $A^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A$ muni de sa structure de monoïde naturelle composante par composante.

Pour $x \in A^\flat$, on note $x = (x^{(n)})_{n \geq 0}$ avec $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ et aussi $x^\sharp = x^{(0)}$. L'application $x \mapsto x^\sharp$ est multiplicative : $(xy)^\sharp = x^\sharp y^\sharp$. Le lemme suivant est bien connu et essentiellement dû à Fontaine.

Lemme 11.6 ([Fon12, §1.1])**.** *Soit A perfectoïde et ϖ une pseudo-uniformisante divisant p. Alors, les applications de réduction modulo ϖ et p induisent des bijection $A^{\circ\flat} \xrightarrow{\sim} \lim_\varphi A^\circ/p \xrightarrow{\sim} A^\circ/\varpi$.*

Démonstration. On construit l'application inverse. Rappelons le fait que pour $a, b \in A^\circ$, $a \equiv b$ modulo p^k implique $a^p \equiv b^p$ modulo p^{k+1}. En particulier, pour une suite $(x_n) \in \lim_\varphi A^\circ/p$, on peut la relever uniquement en $(x_{k+n}^{p^k}) \in \lim_{x \mapsto x^p} A^\circ/p^k$ pour un choix quelconque de relèvements. Prenant la limite en k, on arrive à l'affirmation souhaitée, vu que A est p-adiquement complet. En fait, l'argument marche même remplaçant p par toute pseudo-uniformisante ϖ qui divise p. $\square$

Cela munit $A^{\circ\flat}$ d'une structure de $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite par transport de structure. La règle de multiplication dans cette algèbre est simple, $(xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$, mais la règle d'addition est plus compliquée ; elle est donnée par un procédé de renormalisation que l'on écrit avec la notation $\sharp$ comme

$$(x+y)^\sharp = \lim_{k \to +\infty} \left(x^{1/p^k \sharp} + y^{1/p^k \sharp} \right)^{p^k}. \tag{11.4}$$

Pour obtenir une loi additive sur $A^\flat$, il faudrait soit utiliser l'expression précédente et montrer sa convergence, soit trouver une pseudo-uniformisante de $A^{\circ\flat}$.

Lemme 11.7. *Pour A un anneau perfectoïde et pour tout pseudo-uniformisante ϖ, il existe $\lambda \in (A^\circ)^\times$ tel que $\lambda\varpi = x^\sharp$ pour un certain $x \in A^{\circ,\flat}$.*

Démonstration. Choisissons une pseudo-uniformisante ϖ satisfaisant $\varpi^p \mid p$. De la surjectivité de $\varphi : A^\circ/\varpi \to A^\circ/\varpi^p$, on déduit qu'il existe $x \in A^{\circ,\flat}$ tel que $x^\sharp \equiv \varpi$ modulo ϖ^p. Cela implique le résultat pour ϖ, puisqu'alors $x^\sharp \varpi^{-1} \in 1 + \varpi^{p-1} A^\circ \subset (A^\circ)^\times$.

Maintenant, pour un pseudo-uniformisant quelconque ϖ, choisissons $\varpi' \in A^{\circ,\flat}$ tel que $\varpi'^\sharp$ soit un pseudo-uniformisant. On peut trouver $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[1/p]$ tel que $\varpi'' = \varpi'^{\sharp,-k} \varpi$ satisfasse : $\varpi'' \in A^\circ$ est un pseudo-uniformisant et $(\varpi'')^p \mid p$. En effet, cela découle facilement de la norme sup. On déduit l'assertion pour ϖ par application du cas précédent à ϖ''. $\square$

Le Lemma 11.7 nous fournit $\varpi \in A^{\circ,\flat}$ tel que $\varpi^\sharp$ est une pseudo-uniformisante de A. Alors, $A^\flat = A^{\circ,\flat}[\varpi^{-1}]$ est muni d'une structure d'anneau par transport de structure donnée par l'équation qu'on avait déjà vu. Mais on obtient encore plus :

Proposition 11.8. *Soit A un anneau perfectoïde. L'anneau topologique $A^\flat = \lim_{x\mapsto x^p} A$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre perfectoïde satisfaisant $A^{\flat,\circ} = A^{\circ,\flat}$, et $\varpi \in A^\flat$ est une pseudo-uniformisante de $A^\flat$ si et seulement s'il en est de même pour $\varpi^\sharp \in A$. Si de plus $\varpi^\sharp \mid p$, il existe un isomorphisme canonique $A^{\flat,\circ}/\varpi \xrightarrow{\sim} A^\circ/\varpi^\sharp$.*

Démonstration. On voit aisément qu'un système fondamental de nilvoisinages de $A^\flat$ est donné par les images réciproques de $\varpi^{p^n\sharp}A^\circ$, ce qui coïncide avec $\varpi^{p^n}A^\flat$ comme souhaité. Grâce à l'isomorphisme avec $\lim_\varphi A^\circ/\varpi^\sharp$, on voit aussi que $A^{\circ\flat}$ est complet pour la topologie ϖ-adique, donc $A^\flat$ est de Tate. Comme il est parfait, on est devant une $\mathbb{F}_p$-algèbre perfectoïde. La dernière assertion est claire. $\square$

Jusqu'à ce moment là, on a rien dit sur les anneaux d'éléments intégraux A^+.

Proposition 11.9. *Soit (A, A^+) une paire de Tate avec A perfectoïde. Alors, la paire $(A^\flat, A^{\flat+})$ est une paire de Tate avec $A^\flat$ perfectoïde.*

En fait, il y a une correspondence bijective entre les $A^{\circ\circ} \subset A^+ \subset A^\circ$ intégralement clos dans A et ceux pour $A^\flat$.

Démonstration. Choisissons des pseudo-uniformisants ϖ et $\varpi^\flat$ de A et $A^\flat$ tels que $\varpi = (\varpi^\flat)^\sharp$. Alors, les anneaux intégralement clos $\varpi A^\circ \subset A^+ \subset A^\circ$ sont en bijection avec ceux du quotient $A^\circ/\varpi A^\circ$. On a un résultat analogue pour $A^\flat$. Comme $A^\circ/\varpi A^\circ \simeq A^{\flat\circ}/\varpi^\flat A^{\flat\circ}$, cela donne une bijection entre les anneaux d'éléments entiers dans A et dans $A^\flat$. Il reste à montrer que cette bijection est donnée par la formule de la proposition. Mais il suffit d'observer que si $a^\sharp \in A^+$, alors $a^{p^{-n}\sharp} \in A^+$ aussi par le fait que ce dernier est intégralement clos. $\square$

Donnons enfin une définition.

Définition 11.10. Une algèbre perfectoïde A est un *corps perfectoïde* si A est un corps et A° est un anneau de valuation de rang 1.

Proposition 11.11. *Soit A un anneau perfectoïde. Alors, A est un corps perfectoïde si et seulement s'il en est de même de $A^\flat$.*

Démonstration. Remarquons que l'application de monoïdes $A^\flat = \lim_\varphi A \to A$ telle que $a \mapsto a^\sharp$ est injective, car A est uniforme, donc réduit. En particulier, c'est facile de voir que A est un corps si et seulement s'il en est de même pour $A^\flat$. Quant aux anneaux A° et $A^{\circ\flat}$, il faut montrer que tout idéal finiment engendré est principal et qu'ils forment un ensemble totalement ordonné. On peut utiliser la norme sup pour renormaliser tout idéal de A° de telle sorte qu'il contienne ϖA°. Notons qu'on a un isomorphisme $A^{\circ\flat}/\varpi^\flat \simeq A^\circ/\varpi$, donc la propriété de ce que les idéaux finiment engendrés soient tous principaux et forment une chaîne totalement ordonnée se transporte de l'un quotient à l'autre. Donc, A° est un anneau de valuation si et seulement si $A^{\flat\circ}$ l'est. $\square$

Prenons $K = \mathbb{F}_p(\!(T^{1/p^\infty})\!)$. Le débasculé sur $\mathbb{Q}_p$ correspondant à $\xi = [T] - p$ est $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$. Cependant, le débasculé correspondant à $\xi = \frac{[T^{1/p}]-1}{[T]-1}$ est $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$. Un lemme fondamental pour le théorème de presque pureté de Faltings est le suivant :

Proposition 11.12. *Soit K un corps perfectoïde. Alors, si $K^\flat$ est algébriquement clos, alors il en est de même de K.*

Démonstration. On suppose que K est de caractéristique 0, sinon l'énoncé seraient trivial. Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible unitaire de degré d. On va construire par récurrence une suite $\{x_n\}$ dans K° telle que $|P(x_n)| \leq |p|^n$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq |p|^{\frac{n}{d}}$. Cela suffit pour construire un zéro de P en prenant la limite. Posons $x_0 = 0$ et supposons par récurrence que l'on a construit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant les deux propriétés ci-dessus. Écrivons $P(T + x_n) = \sum_{i=0}^d b_i T^i$, de sorte que $b_d = 1$. Si $b_0 = 0$, alors $P(x_n) = 0$ et on peut simplement prendre $x_i = x_n$ pour tout $i \geq n$.

Supposons désormais que $b_0 \neq 0$. Considérons la quantité $c = \min\{|b_0/b_j|^{1/j} : j > 0,\ b_j \neq 0\}$. En considérant $j = d$, on obtient $c \leq |b_0|^{1/d} \leq 1$. On sait que $|K^\times| = |K^{\flat,\times}|$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel d'après l'hypothèse que $K^\flat$ soit algébriquement clos, donc $c = |u|$ pour un certain $u \in K^\circ$ puisque $|u| = c \leq 1$. Choisissons $t \in K^{\circ\flat}$ avec $|t^\sharp| = |p|$. Considérons un polynôme quelconque $Q^\flat(X) \in K^{\circ\flat}[X]$ relevant la réduction de $Q(X) = \sum_{i=0}^d b_i/b_0 u^i X^i \in K^\circ[X]$ modulo p via l'identification $K^{\circ\flat}/t \simeq K^\circ/p$. On sait par un lemme ci-dessus (il y a très longtemps) qu'il existe une unité $y \in K^{\circ\flat,\times}$ telle que $Q^\flat(y) = 0$. Nous allons vérifier que $x_{n+1} = x_n + u \cdot y^\sharp \in K^\circ$ satisfait les contraintes souhaitées.

Tout d'abord, notons que $P(x_{n+1})/b_0 = Q(y^\sharp) \in K^\circ$ est congru à 0 modulo p puisque y est une racine de $Q^\flat$. Il s'ensuit que $|P(x_{n+1})| \leq |b_0| \cdot |p| \leq |p|^n \cdot |p| = |p|^{n+1}$ où l'on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir $|b_0| = |P(x_n)| \leq |p|^n$. Enfin, on observe que $|x_{n+1} - x_n| = |u||y^\sharp| = |u| = c \leq |b_0|^{1/d} = |P(x_n)|^{1/d} \leq |p|^{n/d}$, où l'on utilise le fait que y est une unité pour la deuxième égalité, et l'hypothèse de récurrence pour la dernière. $\square$

11.2. **Débasculement.** Le foncteur de basculement $(-)^\flat$ admet en fait un adjoint à gauche donné par les vecteurs de Witt, et le morphisme d'adjonction est le morphisme θ de Fontaine. Cet adjoint au basculement permettra de débasculer. Faisons un court rappel des propriétés basiques des vecteurs de Witt.

Définition 11.13. Pour un anneau R quelconque, l'anneau des vecteurs de Witt $W(R) = \prod_{i=0}^\infty R$ est le seul anneau dont les composantes fantômes $W_n = \sum_{i=0}^n p^i X_i^{n-i}$ définissent des homomorphismes d'anneaux $W(R) \to \prod_{i=0}^n R$.

Si S est un anneau p-adique complet sans p-torsion tel que S/pS est parfait, alors il admet une et une seule section $[\cdot] \colon S/pS \to S$ en monoïdes donnée par la composée $S/pS = \lim_\varphi S/pS \simeq \lim_\varphi S \to S$ où la dernière application est la projection $\sharp$. Il y a un isomorphisme d'anneaux $\theta \colon W(S/pS) \to S$ tel que $(a_n) \mapsto \sum [a_n^{p^{-n}}] p^n$. En fait, il y a une équivalence encore plus générale

Théorème 11.14. *Le foncteur $W(-)$ de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres parfaites vers celle des anneaux p-adiques complets est l'adjoint à gauche de $(-)^\flat = \lim_\varphi(-)$. La co-unité d'adjonction $\theta : W(R^\flat) \to R$ est donnée par $\sum_{n\geq 0} [a_n] p^n \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n^\sharp p^n$ et l'unité $R \to W(R)^\flat$ est donnée par $x \mapsto (x^{p^{-n}})_{n\geq 0}$.*

Approfondissons la structure de θ pour les anneaux perfectoïdes.

Lemme 11.15. *Pour A un anneau perfectoïde, $\theta : W(A^{\flat,\circ}) \to A^\circ$ est surjectif.*

Démonstration. Puisque A° est complet pour la topologie p-adique, il suffit de vérifier que la réduction modulo p de θ est surjective. Or celle-ci s'identifie à la projection sur la première composante $\lim_\varphi A^\circ/p \to A^\circ/p$. □

On va maintenant classifier tous les noyaux possibles de θ. On retrouve encore des éléments distingués d'un certain degré, qui s'inspirent de la théorie de la factorisation de Weierstrass des séries entières. Par d'autres mots, on regarde les vecteurs de Witt comme des « fonctions holomorphes de la variable p ».

Définition 11.16. Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique p. Un élément $\xi = \sum_{n\geq 0}[a_n]p^n \in W(A^\circ)$ est *distingué de degré 1* si $a_0 \in A^{\circ\circ}$ et $a_1 \in (A^\circ)^\times$. On note $\mathcal{D}_1(A)$ l'ensemble des éléments distingués de degré 1 dans $W(A^\circ)$.

Ainsi, l'élément ξ est distingué (ou préparé ou primitif) de degré 1 si et seulement si $\xi \bmod W(A^{\circ\circ})$ est dans $pW(A^\circ/A^{\circ\circ})^\times$. On en déduit que $W(A^\circ)^\times$ agit par multiplication sur $\mathcal{D}_1(A)$. On note son quotient $\mathrm{Div}^1(A)$ qui se plonge dans l'ensemble des diviseurs de Cartier de $W(A^\circ)$, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 11.17. *Tout élément $\xi \in \mathcal{D}_1(A)$ est un non-diviseur de zéro.*

Démonstration. Écrivons $\xi = \sum_{n\geq 0}[a_n]p^n$ et $b = \sum_{n\geq 0}[b_n]p^n$ pour un élément $b \in W(A^\circ)$ annihilé par ξ. Soit ϖ une pseudo-uniformisante telle que $a_0 \in \varpi A^\circ$ et démontrons par récurrence que $a_n \equiv 0$ modulo ϖ^m pour tout $m \geq 0$: comme A° est ϖ-adiquement complet, cela entraîne l'assertion que b s'annule et donc que $W(A^\circ)$ est sans ϖ-torsion. Pour l'étape de récurrence, on écrit aussi $b = [\varpi]^m c$ et comme $W(A^\circ)$ est sans $[\varpi]$-torsion, on conclut que $c\xi = 0$. Or, la réduction de ξ dans $W(A^\circ)/[\varpi]$ est égale à p à une unité près. En particulier, on en déduit que la série $pc = \sum [c_n]p^{n+1}$ appartienne à $[\varpi]W(A^\circ)$, donc les c_n sont congrus à 0 modulo ϖ, tel qu'on souhaitait. □

Lemme 11.18. *Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique p, $\varpi \in A$ une pseudo-uniformisante et $\xi \in \mathcal{D}_1(A)$. Alors, la multiplication $\times\xi : W(A^\circ) \hookrightarrow W(A^\circ)$ est stricte par rapport à la topologie $[\varpi]$-adique sur $W(A^\circ)$.*

Démonstration. La topologie $([\varpi], p)$-adique sur $W(A^\circ)$ est la topologie de convergence uniforme des coefficients de Teichmüller, c'est-à-dire que

$$\prod_{i=0}^{\infty} A^\circ \xrightarrow{\sim} W(A^\circ), \qquad (a_n)_{n\geq 0} \longmapsto \sum_{n\geq 0}[a_n]p^n \tag{11.5}$$

est un homéomorphisme, où le membre de gauche est muni de la topologie produit et le membre de droite de la topologie $([\varpi], p)$-adique. On déduit de cette observation que $W(A^\circ)$ est séparé complet pour la topologie $([\varpi], p)$-adique. Il est donc scomplet pour la topologie $[\varpi]$-adique.

Montrons maintenant que la multiplication par ξ est stricte. Écrivons $\xi = \sum_{n\geq 0}[a_n]p^n$. Puisque $a_0 \in A^{\circ\circ}$, quitte à changer ϖ, on peut supposer que $\varpi \mid a_0$ dans A°. On a alors $\xi \equiv p$ modulo $[\varpi]$ à unité près. Puisque $W(A^\circ)/[\varpi]$ est sans p-torsion, si pour un certain $f \in W(A^\circ)$ on a ξf divisible par $[\varpi]$, alors ce dernier divise déjà f. On en déduit par récurrence que $(\xi) \cap [\varpi^n]W(A^\circ) = (\xi[\varpi^n]W(A^\circ)$, ce qui entraîne que l'application est stricte. □

Lemme 11.19 ([SW20, Lemma 11.2.4])**.** *Pour A un anneau perfectoïde, le noyau de θ est principal engendré par tout $\xi \in W(A^{\flat,\circ})$ distingué de degré 1 y appartenant.*

Démonstration. Construisons d'abord un générateur de $\ker\theta$. Soit $\varpi \in A^\flat$ un pseudo-uniformisant satisfaisant $\varpi^\sharp \mid p$. En utilisant la surjectivité de θ, on peut écrire $p = \theta(a)\varpi^\sharp$. On en déduit que $\xi = p - a[\varpi] \in \ker\theta$. Montrons que c'est un générateur. Si l'on munit $W(A^{\flat,\circ})$ de la topologie $[\varpi]$-adique, l'inclusion $\times\xi : W(A^{\flat,\circ}) \hookrightarrow W(A^{\flat,\circ})$ est stricte grâce au Lemma 11.18. Puisque $W(A^{\flat,\circ})$ est séparé complet pour la topologie $[\varpi]$-adique, on en déduit que $(\xi) \subset W(A^{\flat,\circ})$ est un idéal fermé pour la topologie $[\varpi]$-adique. Ainsi, $W(A^{\flat,\circ})/\xi$ est complet pour la topologie $[\varpi]$-adique. Il suffit donc de montrer que $\theta : W(A^{\flat,\circ})/\xi \to A^\circ$ est injective modulo $[\varpi]$. Or la réduction modulo $[\varpi]$ de ce morphisme est $A^{\flat,\circ}/\varpi \to A^\circ/\varpi^\sharp$, qui est un isomorphisme (voir **??**).

Soit maintenant $\xi' \in W(A^{\flat,\circ})$ un autre élément distingué de degré 1 tel que $\theta(\xi') = 0$. Écrivons $\xi' = x\xi$ avec $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]p^n \in W(A^{\flat,\circ})$. On peut trouver un pseudo-uniformisant ϖ' de $A^\flat$ tel que ξ' et ξ soient de la forme $p \times$ unité dans $W(A^{\flat,\circ})/[\varpi']$. Puisque $W(A^{\flat,\circ})/[\varpi']$ est sans p-torsion, on en déduit que x modulo $[\varpi']$ est une unité, et donc x est une unité puisque $W(A^{\flat,\circ})$ est $[\varpi']$-adique. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal sur la classification des débasculements. On note $\mathrm{Spd}(\mathbb{Z}_p)$ le pré-faisceau sur Perf classifiant les débasculés des perfectoïdes en caractéristique p. -

Théorème 11.20 ([SW20, Proposition 11.3.2])**.** *Soit A un anneau perfectoïde de caractéristique p. Il existe une bijection $\mathrm{Div}^1(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spd}(\mathbb{Z}_p)(A)$ entre les diviseurs de Cartier distingués de degré 1 à unité près et l'ensemble des débasculés de A, qui envoie ξ sur $A^\sharp = (W(A^\circ)/\xi)[\varpi^{\flat,-1}]$. Son inverse envoie $A^\sharp$ sur le noyau de $\theta : W(A^\circ) \to A^{\sharp,\circ}$.*

Démonstration. Soit $\varpi \in A$ une pseudo-uniformisante tel que si $\xi = \sum_{n\geq 0}[a_n]p^n$ alors $\varpi^p \mid a_0$. On a déjà vu dans la preuve du Lemma 11.19 que $W(A^{\flat,\circ})/\xi$ est complet pour la topologie $[\varpi]$-adique. De plus, $([\varpi], \xi) = ([\varpi], p)$ et $([\varpi^p], \xi) = ([\varpi^p], p)$. Le résultat s'en déduit facilement du fait que le frobenius $A/\varpi \to A/\varpi^p$ soit bijectif. □

Corollaire 11.21. *La catégorie* Perfd *des paires perfectoïdes est équivalente à la catégorie fibrée* Div^1 *au-dessus de la catégorie* Perf *des paires perfectoïdes en caractéristique p*

Corollaire 11.22 (équivalence de basculement [SW20, Theorem 7.4.5])**.** *Si A est perfectoïde, le basculement $(-)^\flat$ induit une équivalence entre la catégorie tranchée* Perfd_A *des perfectoïdes sur A et celle* $\mathrm{Perf}_{A^\flat}$ *sur $A^\flat$.*

Démonstration. Par fonctorialité, un générateur distingué ξ_A du noyau de $\theta_A : W(A^{\flat\circ}) \to A^\circ$ sera encore un générateur de $\theta_B : W(B^{\flat\circ}) \to B^\circ$, ce qui fournit l'équivalence. □

Un autre corollaire est l'isomorphisme des groupes de Galois de Fontaine–Wintenberger pour les corps perfectoïdes (sans avoir besoin de passer par la presque pureté de Faltings) :

Théorème 11.23. *Soit K un corps perfectoïde. Alors, toute extension finie séparable de K est perfectoïde et la catégorie $K_{\text{fét}}$ de ces extensions s'identifie par l'équivalence de basculement à la catégorie $K^\flat_{\text{fét}}$. En particulier,* $\mathrm{Gal}_K \simeq \mathrm{Gal}_{K^\flat}$.

Démonstration. La première assertion est claire en caractéristique p. Soit M le complété de la clôture algébrique de $K^\flat$. Il est clair que M est complet et parfait, c'est-à-dire que M est perfectoïde. Soit $M^\sharp$ le débasculé de M ; on a déjà vu que $M^\sharp$ est un corps perfectoïde algébriquement clos contenant K. Toute extension finie $L \subset M$ de $K^\flat$ fournit le débasculé $L^\sharp \subset M^\sharp$, une extension finie de K. Il est facile de voir que l'union $N = \bigcup_L L^\sharp \subset M^\sharp$ est un sous-corps dense. Le lemme de Krasner implique alors que N est algébriquement clos. Ainsi, toute extension finie F de K est contenue dans N ; cela signifie qu'il existe une extension galoisienne L de $K^\flat$ telle que F est contenue dans $L^\sharp$. Notons que $L^\sharp$ est encore galoisienne, car le foncteur $L \mapsto L^\sharp$ préserve les degrés et les automorphismes. En particulier, F est donnée par un sous-groupe H de $\mathrm{Gal}(L^\sharp/K) = \mathrm{Gal}(L/K^\flat)$, ce qui donne l'extension finie désirée $F^\flat = L^H$ de $K^\flat$ dont le débasculé est F : l'équivalence de catégories montre que $(F^\flat)^\sharp \subset (L^\sharp)^H = F$, et comme ils ont le même degré, ils sont égaux. □

11.3. **Globalisation.** Soit (A, A^+) une paire perfectoïde.

Proposition 11.24. *On a un homéomorphisme naturel* $(-)^\flat\colon \mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat+})$ *donnée par* $x \mapsto x \circ \sharp$ *qui identifie les parties rationnelles dans les deux côtés.*

Démonstration. Il faut vérifier que $|(f+g)(x^\flat)| \leq \sup\{|f(x^\flat)|, |g(x^\flat)|\}$. Cela se déduit de la continuité de la valuation $x^\flat$ qui implique

$$|(f+g)(x^\flat)| \leq \sup_k |(f^{p^{-k},\sharp} + g^{p^{-k},\sharp})(x)|^{p^k} \leq \max\{|f(x^\flat)|, |g(x^\flat)|\}, \tag{11.6}$$

où on utilise l'inégalité du triangle pour x. On voit aisément que $x^\flat$ est continue en tant que composition de deux applications continues x et $\sharp$. Il faut maintenant construire l'inverse pour vérifier qu'il s'agit d'une bijection. Soit $x \in \mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat,+})$. La paire de Tate $(\kappa(x), \kappa(x)^+)$ est valuative et parfaite, donc perfectoïde. En utilisant la correspondance de basculement, on en déduit un point $(A, A^+) \to (\kappa(x)^\sharp, \kappa(x)^{\sharp+})$ qui donne le précédent par basculement. On note $x^\sharp$ l'image du point fermé de $\mathrm{Spa}(\kappa(x)^\sharp, \kappa(x)^{\sharp+})$. On vérifie aisément que $x \mapsto x^\sharp$ définit un inverse de $x \mapsto x^\flat$.

Maintenant, on vérifie que la bijection $(-)^\flat$ est en fait un homéomorphisme. Soient $f_1, \ldots, f_n \in A^\flat$ engendrant $A^\flat$ comme idéal et $g \in A^\flat$. Pour chaque $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|f_i(x^\flat)| \neq 0$ et donc $|f_i^\sharp(x)| \neq 0$. On en déduit que $f_1^\sharp, \ldots, f_n^\sharp$ ne s'annulent pas simultanément sur $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ et engendrent donc A comme idéal. On vérifie alors immédiatement que l'image réciproque via notre bijection du sous-ensemble rationnel $R^\flat(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ est $R(\frac{f_1^\sharp,\ldots,f_n^\sharp}{g^\sharp})$. Donc on a une application continue et qc. De plus, elle est généralisante, car le localisé de $\mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat+})$ en x s'identifie à $\mathrm{Spa}(\kappa(x), \kappa(x)^+)$ lequel est en bijection avec $\mathrm{Spa}(\kappa(x)^\sharp, \kappa(x)^{\sharp,+})$. Mais il est bien connu qu'une bijection continue qc et généralisante d'espaces spectraux est un homéomorphisme.

Enfin, on voit que l'homéomorphisme $(-)^\flat$ préserve et reflète les parties rationnelles. C'est facile de voir que $R^\flat(\frac{a_1,\ldots,a_n}{b})$ se tire en arrière vers $R(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$. Réciproquement, soit $f_1, \ldots, f_n, g$ éléments de A^+ dont l'idéal engendré contient une puissance de ϖ. Soit $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] p^n = [x_0] + p x_{\geq 1}$ un relèvement à $W(A^\flat)$ par θ des f_i ou de g supposés non nuls. Alors, écrivons aussi $\xi = [a_0] + p\xi_{\geq 1}$ et rappelons que ce dernier est une unité. Alors, on pose $q := \xi_{\geq 1}^{-1} x_{\geq 1}$ et on voit que $y = x - q\xi = [x_0] - [a_0]q$ s'écrit comme

$[y_0] + py_{\geq 1}$ de sorte que la norme de Gauss de $y_{\geq 1}$ devient de plus en plus petite (car multipliée par la norme sup de a_0). Continuant cette division par récurrence, on peut supposer que $\theta(x_{\geq 1}) \in \varpi^N A^\circ$ pour un $N \gg 0$ et donc on peut approximer les f_i et g assez bien par des $a_i^\sharp$ et $b^\sharp$. Cela entraîne que $R(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}) = R(\frac{a_1^\sharp,\ldots,a_n^\sharp}{b^\sharp})$ qui est le tiré en arrière de $R^\flat(\frac{a_1,\ldots,a_n}{b})$, comme souhaité. □

On peut même démontrer plus que ça.

Théorème 11.25. *Pour tout ouvert rationnel $U \subset X$ de basculé $U^\flat \subset X^\flat$, la paire de Tate $(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$ est perfectoïde de basculé $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$. En particulier, X est stablement uniforme et donc faisceautique.*

Démonstration. Soit $U = R(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ un sous-ensemble rationnel de X défini par $f_i, g \in R^+$. On fixe toujours une pseudo-uniformisante ϖ de $A^\flat$ et on considère l'élément correspondant $\varpi^\sharp \in A$. Vu que le basculement induit un homéomorphisme identifiant les partis rationnelles, on peut supposer que $f_i = a_i^\sharp$ et $g = b^\sharp$ pour $a_i, b \in R^{\flat +}$. Écrivons $U^\flat = R^\flat(\frac{a_1,\ldots,a_n}{b})$ pour le sous-ensemble rationnel correspondant de $X^\flat$, de sorte que U est l'image réciproque de $U^\flat$ sous $X \mapsto X^\flat$.

Soit (B, B^+) la paire quotient de $(T_n^{p^{-\infty}}(A), T_n^{p^{-\infty}}(A^+))$ par le idéal fermé engendré par $(g^{p^{-\infty}} X^{p^{-\infty}} - f^{p^{-\infty}})$. En utilisant, les propriétés universelles du quotient et de la localisation, on en déduit un isomorphisme $(B, B^+) \simeq (\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U))$. Il suffit de vérifier que (B, B^+) est perfectoïde et d'identifier $(B^\flat, B^{\flat +})$ avec la localisation de $(A^\flat, A^{\flat +})$ en $U^\flat$. Mais la paramétrisation des débasculés nous dit comment calculer celui du localisé $(\mathcal{O}_{X^\flat}(U^\flat), \mathcal{O}_{X^\flat}^+(U^\flat))$ qui est donné par un quotient pareil de la perfection d'une algèbre de Tate et donc encore perfectoïde vu que la procédure de localisation préserve le fait d'être parfait en caractéristique p. On voit aisément que cette description est préservée en passant aux anneaux de Witt et en quotientant par ξ. Cela donne l'uniformité stable aussi et le fait que X soit faisceautique. Cela nous permet de ramener l'assertion à la réduction modulo ϖ et de basculer, où l'identification devienne claire. □

Maintenant, on peut définir les espaces perfectoïdes.

Définition 11.26. Un espace perfectoïde X est un espace adique localement isomorphe au spectre adique d'une paire perfectoïde (A, A^+).

On peut montrer qu'ils sont stables par produits fibrés en utilisant l'équivalence de basculement pour réduire au cas évident de la caractéristique p. On obtient encore un foncteur de basculement $X \mapsto X^\flat$, une description des débasculés en termes de Div^1_X, et une équivalence pour la catégorie en dessus de X. On peut démontrer aussi le théorème d'équivalence des recouvrements finis étales (encore sans passer par la presque pureté de Faltings généralisée au cadre perfectoïde). On dit que $f\colon X \to Y$ est fini étale s'il y a des recouvrements affinoïdes $U = f^{-1}(V) \to V$ induits par $(A, A^+) \to (B, B^+)$ avec $A \to B$ fini étale et $A^+ \to B^+$ intégral.

Théorème 11.27. *Soit X un espace perfectoïde. Alors la catégorie $X_{\text{fét}}$ est une sous-catégorie pleine de Perf_X et l'équivalence de basculement se restreint en une équivalence $X_{\text{fét}} \simeq X^\flat_{\text{fét}}$*

Démonstration. On commence par rappeler que l'assertion a déjà été démontrée pour un corps perfectoïde (K, K^+). On se ramène immédiatement au cas perfectoïde. Supposons que $(A^\flat, A^{\flat +}) \to (B^\flat, B^{\flat +})$ est fini étale. Alors, on va démontrer que $(A^\flat, A^+) \to (B, B^+)$ est aussi fini étale. Choisissons $b_1, \ldots, b_n$ qui engendrent $B^\flat$ comme $A^\flat$-module. Par le théorème de l'application ouverte, l'application résultante $A^{\flat, \oplus n} \to B^\flat$ est stricte. Il s'ensuit facilement que $[b_1], \ldots, [b_n]$ engendrent $W(B^{\flat +})[1/[\varpi^\flat]]$ sur $W(A^{\flat +})[1/[\varpi^\flat]]$, et donc que $b_1^\sharp, \ldots, b_n^\sharp$ engendrent B sur A. Vu que A est uniforme et donc réduit, on peut vérifier que $A \to B$ est fini plat en tensorisant sur A avec tout corps perfectoïde et vérifiant que son rang est localement constant, ce qui ramène la question au cas des corps perfectoïdes. Rappelons maintenant que $A \to B$ est fini étale si et seulement si $A \to B$ et $B \otimes_A B \to B$ sont tous deux finis plats. Par la compatibilité du débasculement avec les produits tensoriels, on peut répéter l'argument précédent pour voir que $B \otimes_A B \to B$ est fini plat, puis en déduire que $A \to B$ est fini étale.

On vient de montrer ci-dessus que l'équivalence de basculement reflète les A-algèbres finis étales. Il faut juste montrer que $(-)^\flat$ les préserve. Si A est un corps perfectoïde, cela a été fait dans le premier paragraphe. Dans le cas général, étant donné un morphisme fini étale $A \to B$, on peut combiner le cas des corps avec la propriété hensélienne des anneaux locaux pour produire un recouvrement rationnel $\{(A, A^+) \to (A_i, A_i^+)\}$ tel que pour chaque i, $B \otimes_A A_i$ est le débasculé d'une $A_i^\flat$-algèbre finie étale. Par pleine fidélité, ces modules se recollent pour donner un $\mathcal{O}$-module fini étale sur $\mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat +})$. par une variante de l'acyclicité de Tate. Puisque $\mathrm{Spa}(A^\flat, A^{\flat +})$ est faisceautique, on applique une variante de l'acyclicité de Tate pour obtenir un $A^\flat$-module fini étale $B^\flat$ dont le débasculé donne B. En particulier, B est perfectoïde. $\square$

Soit A un anneau perfectoïde. Notons qu'en général, toute A-algèbre finie n'est pas perfectoïde, même si l'on se restreint à la caractéristique p L'argument ci-dessus montre néanmoins que $B \mapsto B^\flat$ définit une équivalence de catégories entre les A-algèbres finies perfectoïdes et les $A^\flat$-algèbres finies perfectoïdes.

Plusieurs fois, on est passé à côté d'un énoncé sur les presques mathématiques. L'idée de ce formalisme est de quotienter les $A^+/A^{\circ\circ}$-modules (appelés presque nuls) dans la catégorie des A^+-modules. La catégorie résultante est notée $\mathrm{Mod}^a_{A^+}$ et elle est plus fine que Mod_A. Plusieurs assertions (comme par exemple, l'acyclicité du faisceau de structure ou l'équivalence des recouvrements finis étales) ont des presque avatars (qui sont des énoncés plus forts !) qui permettent de mieux passer de la caractéristique p à la caractéristique 0.

12. Courbe de Fargues–Fontaine

Dans cette section, on va introduire la courbe de Fargues–Fontaine et en classifier les fibrés vectoriels. Pour cela, on fera usage de quelques propriétés de la topologie pro-étale et de la v-topologie sans presque les introduire. Je sais que ceci est un peu abusif, mais j'espère que voir ces méthodes appliquées donnera au lecteur la bonne motivation pour s'y mettre.

12.1. **La courbe.** La construction de la courbe de Fargues–Fontaine se fait en trois étapes. D'abord, on construit une courbe adique $\mathcal{Y}_S$ sur $\mathbb{Z}_p$, qui porte une action de Frobenius φ. En passant au lieu $Y_S = \mathcal{Y}_S \setminus \{\pi = 0\}$, c'est-à-dire le changement de base à $\mathbb{Q}_p$, l'action de φ est libre et totalement discontinue, de sorte qu'on peut passer au quotient $X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$, qui sera la courbe de Fargues–Fontaine.

Nous commençons par construire $\mathcal{Y}_S$ dans le cas affinoïde. Plus précisément, si $S = \operatorname{Spa}(R, R^+)$ est un espace perfectoïde affinoïde au-dessus de $\mathbb{F}_q$, et $\varpi \in R^+$ est un pseudo-uniformisant (i.e. une unité topologiquement nilpotente de R), on pose

$$\mathcal{Y}_S = \operatorname{Spa} W(R^+) \setminus V([\varpi]). \tag{12.1}$$

Ici $W(R^+)$ est muni de la topologie $(\pi, [\varpi])$-adique. Le frobenius φ de R^+ induit un automorphisme φ de $\mathcal{Y}_S$. Pour construire la courbe de Fargues–Fontaine, on enlèvera éventuellement $V(\pi)$ de $\mathcal{Y}_S$ et on quotientera par φ. Cependant, aucune de ces courbes n'est pas perfectoïde, donc pour montrer l'uniformité stable de $\mathcal{Y}_S$ donnant lieu à des espaces adiques, on devra faire un petit détour par les sous-perfectoïdes, une notion qui a été introduite par Hansen–Kedlaya.

Définition 12.1. Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Tate. Alors R est *sous-perfectoïde* s'il existe un anneau perfectoïde $\widetilde{R}$ avec une injection $R \hookrightarrow \widetilde{R}$ qui admet une rétraction comme R-modules topologiques.

Tout anneau perfectoïde est bien sûr sous-perfectoïde. Les algèbres de Tate $T_I(\mathbb{Q}_p)$ sont aussi sous-perfectoïdes, en les plongeant dans $T_I^{p^{-\infty}}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})$. La classe des anneaux sous-perfectoïdes possède de bonnes propriétés de stabilité.

Proposition 12.2. *La catégorie des anneaux perfectoïdes est stable par localisation rationnelle, extensions finies étales et algèbres de Tate.*

Démonstration. Notons que si S est une R-algèbre de Tate et $R \to \tilde{R}$ est scindé en R-modules topologiques, alors il en est de même de $S \to \tilde{S} := S \hat{\otimes}_S R$. Par d'autres mots, l'existence d'une retraction en modules topologiques est stable par produit tensoriel complet. Or, la propriété d'être perfectoïde est aussi stable par localisation rationnelle et par des homomorphismes finis étales. Donc em combinant ces deux observations, on voit qu'il en est de même de la propriété d'être sous-perefectoïde. Quant aux algèbres de Tate, il suffit de voir que $R\langle T_1, \dots, T_n\rangle \hookrightarrow \widetilde{R}\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}\rangle$ scinde en R-modules topologiques. □

En particulier, on obtient la proposition suivante.

Proposition 12.3. *Soit (R, R^+) une paire de Huber de Tate telle que R est sous-perfectoïde. Alors (R, R^+) est stablement uniforme, et donc faisceautique.*

Démonstration. Comme la propriété d'être sous-perfectoïde est stable par localisation rationnelle d'après la Proposition 12.2, il suffit de voir que R est uniforme. Mais cette propriété passe évidemment aux sous-anneaux scindés (par exemple, en comparant la norme sup à la résiduelle). □

Proposition 12.4. *La construction précédente définit un espace adique analytique $\mathcal{Y}_S$ sur $\mathbb{Z}_p$. Le changement de base $\mathcal{Y}_S \times_{\operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p} \operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$ est un espace perfectoïde, de basculé donné par $S \times_{\mathbb{F}_q} \operatorname{Spa}\mathbb{F}_q[\![t^{1/p^\infty}]\!] = \mathbb{D}_S^{p^{-\infty}}$, un disque ouvert unité perfectoïde au-dessus de S.*

Démonstration. On peut recouvrir $\mathcal{Y}_S$ par les sous-ensembles $\mathcal{Y}_{S,[0,n]} := \{|\pi|^n \leq |[\varpi]| \neq 0\} \subset \mathcal{Y}_S$, qui sont des sous-ensembles rationnels de $\operatorname{Spa} W(R^+)$, où $n > 0$ est un entier que l'on suppose être une puissance de p pour simplifier. En utilisant l'automorphisme de Frobenius de (R, R^+), on peut en fait supposer que $n = 1$. Alors $\mathcal{Y}_{S,[0,1]}$ s'identifie à $\operatorname{Spa}(B_{S,[0,1]}, B^+_{S,[0,1]})$ où

$$B_{S,[0,1]} = W(R^+)\left\langle \frac{p}{[\varpi]} \right\rangle \left[\frac{1}{[\varpi]}\right] \tag{12.2}$$

et $B^+_{S,[0,1]} \subset B_{S,[0,1]}$ est la clôture intégrale de $W(R^+)\langle \frac{p}{[\varpi]} \rangle$. Pour voir que $\mathcal{Y}_S$ est un espace adique et que $\mathcal{Y}_S \times_{\operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p} \operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$ est perfectoïde, il suffit de montrer que $B_{S,[0,1]}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$ est une algèbre de Tate perfectoïde, vu que $B_{S,[0,1]}$ en est un facteur direct comme $B_{S,[0,1]}$-module topologique, ce qui montre que $\mathcal{Y}_{S,[0,1]}$ et ainsi tout $\mathcal{Y}_S$ est sous-perfectoïde. Abrégeons

$$A = B_{S,[0,1]}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}] \tag{12.3}$$

et notons $A^+ \subset A$ la clôture intégrale de $B^+_{S,[0,1]}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$. En particulier, A^+ est presque isomorphe à $R^+/\varpi[t^{1/p^\infty}]$, donc A est perfectoïde à basculé donné par $R\langle t^{1/p^\infty}\rangle$, où $t^\sharp = \frac{[\varpi]}{p}$, ce qui correspond au sous-ensemble

$$\{|t| \leq |\varpi| \neq 0\} \subset S \times_{\mathbb{F}_q} \operatorname{Spa}\mathbb{F}_q[\![t^{1/p^\infty}]\!] = \mathbb{D}_S^{1/p^\infty}. \tag{12.4}$$

En décalant à tout n, cela identifie le basculé de $\mathcal{Y}_S \times_{\operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p} \operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$ avec $\mathbb{D}_S^{1/p^\infty}$. □

Proposition 12.5. *Pour tout espace perfectoïde T au-dessus de $\mathbb{F}_q$, se donner un débasculé $T^\sharp$ de T ainsi qu'un morphisme $T^\sharp \to \mathcal{Y}_S$ d'espaces adiques analytiques est équivalent à se donner un débasculé $T^\sharp$ avec un morphisme $T^\sharp \to \operatorname{Spa}\mathbb{Z}_p$, et un morphisme $T \to S$. Autrement dit, il y a un isomorphisme naturel*

$$\mathcal{Y}_S^\diamondsuit \cong \operatorname{Spd}\mathbb{Z}_p \times S. \tag{12.5}$$

Démonstration. En changeant de notation, il s'agit de voir que pour tout espace perfectoïde T au-dessus de $\mathbb{Z}_p$, se donner un morphisme $T \to \mathcal{Y}_S$ est équivalent à se donner un morphisme $T^\flat \to S$. Sans perte de généralité, supposons $T = \operatorname{Spa}(A, A^+)$ affinoïde. Se donner un morphisme $T \to \mathcal{Y}_S$ est équivalent à se donner un morphisme $W(R^+) \to A^+$ tel que l'image de $[\varpi]$ dans A soit inversible. Par la propriété universelle de $W(R^+)$ lorsque R^+ est parfait, cela est équivalent à se donner un morphisme $R^+ \to (A^+)^\flat$ tel que l'image de ϖ dans $A^\flat$ soit inversible. Mais ceci est précisément un morphisme $T^\flat = \operatorname{Spa}(A^\flat, A^{\flat+}) \to S = \operatorname{Spa}(R, R^+)$. □

En particulier, il y a un morphisme naturel

$$|\mathcal{Y}_S| \cong |\mathcal{Y}_S^\diamondsuit| \cong |\operatorname{Spd}\mathbb{Z}_p \times S| \to |S|. \tag{12.6}$$

La compatibilité de la construction $S \mapsto \mathcal{Y}_S$ avec les inclusions de sous-espaces affinoïdes permet de recoller et d'étendre $\mathcal{Y}_S$ à tout espace perfectoïde S, de sorte que l'on dispose d'un espace adique analytique $\mathcal{Y}_S$ sur $\mathbb{Z}_p$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{Y}_S^\diamondsuit \cong \operatorname{Spd}\mathbb{Z}_p \times S$, dont le tiré en arrière à tout sous-ensemble affinoïde $U \subset S$ redonne $\mathcal{Y}_U$.

Rappelons à présent les « sections de $\mathcal{Y}_S \to S$ ».

Proposition 12.6. *Soit S un espace perfectoïde au-dessus de $\mathbb{F}_q$. Les sections de $\mathcal{Y}_S^{\diamondsuit} \to S$ sont en bijection naturelle avec les morphismes $S \to \operatorname{Spd} \mathbb{Z}_p$ (c'est-à-dire, les débasculés $S^\sharp$ de S). De plus, tout débasculé $S^\sharp$ de S se plonge naturellement dans $\mathcal{Y}_S$ comme un diviseur de Cartier fermé.*

Analysons maintenant le cas $S = \operatorname{Spa} C$ pour un corps non archimédien complet algébriquement clos au-dessus de $\mathbb{F}_q$. Tout débasculé $C^\sharp$ de C au-dessus de $\mathbb{Z}_p$ définit un diviseur de Cartier fermé $\operatorname{Spa} C^\sharp \hookrightarrow \mathcal{Y}_S$ et en particulier un point fermé de $|\mathcal{Y}_C|$, induisant une injection de l'ensemble de tels débasculés dans $|\mathcal{Y}_C|$; l'ensemble des *points classiques* $|\mathcal{Y}_C|^{\mathrm{cl}} \subset |\mathcal{Y}_C|$ est défini comme l'image de cette injection.

Via le morphisme naturel $|\mathbb{D}_C| \to |\mathcal{Y}_C|$ obtenu par basculement, les points classiques $|\mathbb{D}_C|^{\mathrm{cl}} = \{x \in C \mid |x| < 1\}$ sont exactement l'image réciproque de $|\mathcal{Y}_C|^{\mathrm{cl}}$ Il s'ensuit que la formation des points classiques est compatible avec le changement de C. Les point de rang 1 non classiques contiennent des ouverts de $|\mathcal{Y}_{C'}|$ pour un $C'|C$ convenable.

Il existe en fait une autre caractérisation des points classiques en termes d'idéaux maximaux.

Proposition 12.7. *Soit $U = \operatorname{Spa}(B, B^+) \subset \mathcal{Y}_C$ un sous-ensemble affinoïde. Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subset B$, le quotient $B/\mathfrak{m}$ est un corps non archimédien, induisant une bijection entre $\operatorname{Sp}(B)$ et $|U|^{\mathrm{cl}} := |U| \cap |\mathcal{Y}_C|^{\mathrm{cl}} \subset |\mathcal{Y}_C|$.*

Démonstration. L'injection $|U|^{\mathrm{cl}} \hookrightarrow \operatorname{Spm}(B)$ est claire car tout point classique fournit un idéal maximal. Pour la surjectivité, on se ramène au cas connexe via le morphisme de basculement $|\mathbb{D}_C| \to |\mathcal{Y}_C|$. On montre alors que tout $f \in B$ non nul ne s'annule qu'en des points classiques, ce qui résulte de l'injectivité de $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U')$ pour tout ouvert $U' \subset U$, laquelle se réduit au cas classique des algèbres de Tate sur $\mathbb{D}_C$ via le basculement. Cela utilise un théorème assez dur de Bhatt–Scholze selon lequel les fermés de Zariski sont encore des perfectoïdes. $\square$

La Proposition 12.5 implique que, dès que U est connexe, les anneaux B sont des domaines principaux [Ked16].

Corollaire 12.8. *Soit $U = \operatorname{Spa}(B, B^+) \subset \mathcal{Y}_C$ un sous-ensemble affinoïde connexe. Alors l'anneau B est un domaine à idéaux principaux.*

Démonstration. Tout idéal maximal de B est principal car il provient d'un diviseur de Cartier fermé. Pour montrer que le lieu d'annulation de $f \in B$ non nul est fini, on note que si f était infiniment divisible par le générateur ξ_x d'un idéal maximal, alors f s'annulerait sur toute une boule voisinage de x, contredisant l'uniformité de B. Ainsi $V(f)$ est discret et fini, et f se factorise en un produit de générateurs locaux fois une unité. $\square$

On peut maintenant définir la courbe de Fargues–Fontaine.

Définition 12.9. Pour tout espace perfectoïde S au-dessus de $\mathbb{F}_q$, la courbe de Fargues–Fontaine relative est

$$X_S = Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}} \quad \text{où} \quad Y_S = \mathcal{Y}_S \times_{\operatorname{Spa} \mathbb{Z}_p} \operatorname{Spa} \mathbb{Q}_p = \mathcal{Y}_S \setminus V(\pi). \tag{12.7}$$

Pour voir que cela est bien formé, on note que l'action de φ sur Y_S est libre et totalement discontinue. En fait, si $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ est affinoïde et $\varpi \in R$ est une pseudo-uniformisante, alors l'ouvert rationnel $Y_{S,[1,q]} = \{|\pi| \leq |[\varpi]| \leq |\pi|^q\} \subset Y_S$, est affinoïde $\mathrm{Spa}(B_{[1,q]}, B^+_{[1,q]})$ et on peut former X_S comme le quotient de $Y_{S,[1,q]}$ via l'identification $\varphi : Y_{S,[1,1]} \xrightarrow{\sim} Y_{S,[q,q]}$. En particulier, X_S est quasi-compact quasi-séparé lorsque S est affinoïde.

On peut penser à X_S comme à la collection de courbes $(X_{\kappa(s),\kappa(s)^+})_{s\in S}$, celle définie et étudiée originalement par Fargues–Fontaine, réunies en une « famille de courbes ». Bien que X_S ne soit pas situé au-dessus de S, le Frobenius absolu $\varphi \times \varphi$ de $S \times \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur l'espace topologique et on a

$$|X_S| \cong |X_S^\diamondsuit| \cong |S \times \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)/\varphi^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{id}| \cong |S \times \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{id} \times \varphi^{\mathbb{Z}}| \longrightarrow |S|. \tag{12.8}$$

Ainsi l'espace topologique $|X_S|$ est situé au-dessus de $|S|$, et pour tout S le morphisme $|X_S| \to |S|$ est qcqs. De plus, on a la version suivante d'une proposition précédente.

Corollaire 12.10. *Les sections de $Y_S^\diamondsuit \to S$ sont naturellement en bijection avec les morphismes $S \to \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ (c'est-à-dire, les débasculés $S^\sharp$ de S au-dessus de $\mathbb{Q}_p$). Les débasculés $S^\sharp$ de S au-dessus de $\mathbb{Q}_p$ se plongent $S^\sharp \hookrightarrow Y_S$ comme diviseurs de Cartier fermés dans Y_S.*

Corollaire 12.11. *Les sections de $X_S^\diamondsuit \to S$ sont naturellement en bijection avec les morphismes $S \to \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)/\varphi^{\mathbb{Z}}$ (c'est-à-dire, les φ-orbites de débasculés $S^\sharp$ de S au-dessus de $\mathbb{Q}_p$). Une telle φ-orbite se plonge $S^\sharp \hookrightarrow X_S$ comme diviseur de Cartier fermé dans X_S.*

En particulier, on voit que l'espace de modules Div^1_X des sections de la courbe de Fargues–Fontaine s'identifie à $\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)/\varphi^{\mathbb{Z}}$. Notons que quelque chose d'étrange se produit dans le formalisme ici : d'ordinaire, la courbe elle-même représenterait l'espace de modules des diviseurs de Cartier de degré 1 ! On note $* = \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_p)$ le pré-faisceau envoyant tout $S \in \mathrm{Perf}$ sur un point $*$. Le morphisme $\mathrm{Div}^1_X \to *$ est propre car qcqs et indépendant de R^+, et universellement ouvert. Il est même représentable en diamants spatiaux et cohomologiquement lisse : le premier adjectif n'est pas de la science-fiction, sinon il veut dire un quotient qcqs $D = Z/R$ d'un perfectoïde Z par une relation d'équivalence pro-étale $R \subset Z \times Z$ dont l'espace topologique associé $|D|$ est encore spectral ; le second adjectif renvoie au formalisme des faisceaux étales dans le cadre des champs sur les perfectoïdes, dont on n'aura pas l'occasion d'en parler.

En particulier, le morphisme

$$|X_S| = |\mathrm{Div}^1 \times S| \longrightarrow |S| \tag{12.9}$$

est ouvert et fermé. On peut ainsi penser à X_S comme étant « une famille propre et lisse au-dessus de S ». Les points classiques de X_C sont $|X_C|^{\mathrm{cl}} := |Y_C|^{\mathrm{cl}}/\varphi^{\mathbb{Z}} \subset |X_C| = |Y_C|/\varphi^{\mathbb{Z}}$. Ils sont en bijection avec $(\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)/\varphi^{\mathbb{Z}})(C) = \mathrm{Div}^1_X(C)$, c'est-à-dire sont donnés par les débasculés de C au-dessus de $\mathbb{Q}_p$ modulo le Frobenius, ou par les diviseurs de Cartier fermés de degré 1 sur X_C. Pour tout sous-ensemble affinoïde ouvert $U = \mathrm{Spa}(B, B^+) \subset X_C$, on montre que $\mathrm{Sp}(B) = |U| \cap |X_C|^{\mathrm{cl}}$ et que B est une somme directe finie de domaines principaux.

12.2. **Fibrés vectoriels.** Supposons que $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ est affinoïde perfectoïde. Comme Y_S s'écrit comme colimite filtrée le long de localisations rationnelles, on a $H^i(Y_S, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$. Ainsi, si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X_S, on a

$$R\Gamma(X_S, \mathcal{E}) = \Big[H^0(Y_S, \mathcal{E}|_{Y_S}) \xrightarrow{\varphi - 1} H^0(Y_S, \mathcal{E}|_{Y_S})\Big]. \tag{12.10}$$

En particulier, cela s'annule en degré > 1. Si $[\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0]$ est un complexe de fibrés vectoriels sur X_S en degrés (cohomologiques) $[-1, 0]$ tel que $H^0(X_T, \mathcal{E}_1|_{X_T}) = 0$ pour tout $T \in \mathrm{Perf}_S$, on définit

$$\mathcal{BC}([\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0]) : T \mapsto \mathbb{H}^0(X_T, [\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0]|_{X_T})$$

comme le v-faisceau correspondant sur Perf_S. On l'appelle l'*espace de Banach–Colmez* associé à $[\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0]$. On l'appliquera surtout lorsque l'un des deux termes $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_0$ est nul.

Rappelons que les isocristaux sont des $\breve{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriels D de dimension finie munis d'un isomorphisme σ-linéaire $\varphi : D \xrightarrow{\sim} D$, où $\breve{\mathbb{Q}}_p = W(\bar{\mathbb{F}}_p)[\frac{1}{p}]$ est l'extension non ramifiée complète de $\mathbb{Q}_p$ munie de son automorphisme de Frobenius σ. Il existe pour tout $S \in \mathrm{Perf}$, un foncteur monoïdal exact

$$\mathrm{Isoc} \to \mathrm{Bun}(X_S) \tag{12.11}$$

de la catégorie des isocristaux vers celle des fibrés vectoriels. Concrètement, à chaque isocrystal (D, φ) on lui associe un fibré vectoriel $\mathcal{E}(D)$ en descendant $D \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \mathcal{O}_{Y_S}$ à X_S via $\varphi \otimes \varphi$. On note $\mathcal{O}_{X_S}(n)$ l'image de $(\breve{\mathbb{Q}}_p, p^{-n}\sigma)$; plus généralement, on peut définir $\mathcal{O}_{X_S}(\lambda)$ pour tout rationnel λ en suivant la classification de Dieudonné–Manin.

Le fibré $\mathcal{O}_{X_S}(1)$ est relié à la théorie locale du corps de classes via la théorie de Lubin–Tate. Le groupe formel de Lubin–Tate pour l'uniformisante p de $\mathbb{Q}_p$ est le complété formel $\widehat{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p} = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[\![X]\!])$ du groupe multiplicatif sur $\mathbb{Z}_p$. Le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ des unités p-adiques y opère par $X \mapsto (1+X)^\alpha - 1$. En fibres génériques adiques, l'application du logarithme est donné explicitement par la série convergente

$$\log : (\widehat{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p})^{\mathrm{ad}}_\eta \simeq \mathbb{D}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{G}_{a,\mathbb{Q}_p} : X \mapsto \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^i}{i} X^i \tag{12.12}$$

sur le disque ouvert unité. On vérifie qu'il est un isomorphisme sur le disque ouvert de rayon $1/(p-1) = \log_p|\zeta_p - 1|$, et par décalage par les puissances de p on obtient que son noyau est la fibre générique du groupe p-divisible $\widehat{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p}[p^\infty] = \mu_{p^\infty}$ sur $\mathrm{Spa}\,\mathbb{Z}_p$. On peut même identifier $(\mu_{p^\infty})^{\mathrm{ad}}_\eta$ à une réunion disjointe de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

On a également besoin du « revêtement universel » $\widetilde{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p} := \lim_{\times p} \widehat{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p}$ défini en tant que limite projective de la multiplication par p. Ce schéma formel s'identifie avec $\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p[\![\widetilde{X}^{p^{-\infty}}]\!]$ pour un choix de la coordonnée $\widetilde{X}$ tel que le logarithme est donné par la série

$$\log : (\widetilde{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p})^{\mathrm{ad}}_\eta \to \mathbb{G}_{a,\mathbb{Q}_p} : \tilde{X} \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} p^i \widetilde{X}^{p^{-i}} \tag{12.13}$$

Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adiquement complète A, on a $\widetilde{G}(A) \cong \widetilde{G}(A/p)$, ce qui provient du fait que $\mathbb{Z}_p[\![\widetilde{X}^{p^{-\infty}}]\!]$ est relativement parfait sur $\mathbb{Z}_p$. La coordonnée $\widetilde{X}$ induit même une identification

$$\widetilde{G}(A) = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A^{\circ\circ} = A^{\flat,\circ\circ} \subset A^\flat, \tag{12.14}$$

svec l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents du basculé. Ceci est lié au fibré en droites $\mathcal{O}_{X_S}(1)$ de la façon suivante.

Proposition 12.12 ([FS24, Proposition II.2.2])**.** *Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un $\mathbb{F}_p$-espace perfectoïde et soit $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$ un $\mathbb{Q}_p$-débasculé de S, donnant lieu à l'immersion fermée $S^\sharp \hookrightarrow X_S$. Soit $\mathcal{O}_{X_S}(1)$ le fibré en droites sur X_S correspondant à l'isocristal $(\breve{\mathbb{Q}}_p, p^{-1}\sigma)$. Alors l'application*

$$\widetilde{G}(R^{\sharp+}) \cong R^{\circ\circ} \to H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) : \widetilde{X} \mapsto \sum_i p^i[\widetilde{X}^{p^{-i}}] \tag{12.15}$$

définit un isomorphisme naturel

$$\widetilde{G}(R^{\sharp+}) \cong H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1)) = H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S})^{\varphi=p}. \tag{12.16}$$

Sous cet isomorphisme, le morphisme d'évaluation $H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1)) \to H^0(S^\sharp, \mathcal{O}_{S^\sharp}) = R^\sharp$ en $S^\sharp$ s'identifie au logarithme $\log : \widetilde{G}(R^{\sharp+}) \to R^\sharp$*.*

Démonstration. La compatibilité avec le logarithme est claire sur les formules explicites. On raisonne dans le cas p-adique. On peut réécrire $H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1))$ comme $B^{\varphi=p}_{R,[1,\infty]}$, où les éléments de $B_{R,[1,\infty]}$ s'écrivent comme des séries en $\sum_{i\in\mathbb{Z}}[r_i]p^i$ avec $r_i \in R$ satisfaisant à des conditions de convergence. La condition $\varphi = p$ se traduit en $r_i = r_{i+1}^p$, donc les coefficients sont déterminés uniquement par r_0. Enfin, pour que la convergence soit assurée, il faut et il suffit que $r_0 \in R^{\circ\circ}$. Alors, on voit aisément que log s'identifie à l'évaluation, car celle-ci est définie en termes de l'homomorphisme θ de Fontaine. □

Le corps $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ étant perfectoïde, on a une immersion fermée $\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}] \hookrightarrow \widetilde{G} = \mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p[\![\widetilde{X}^{1/p^\infty}]\!]$, induisant un isomorphisme $\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p[\![\widetilde{X}^{1/p^\infty}]\!]^\flat \cong \mathrm{Spf}\, \mathbb{F}_q[\![X^{1/p^\infty}]\!]$ de basculés. Calculant avec les modules de Tate, on voit par la Proposition 12.12 que, si S vit au-dessus de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$, on obtient une section non nulle de $\mathcal{O}_{X_S}(1)$, qui s'annule en $S^\sharp \subset X_S$.

Proposition 12.13 ([FS24, Proposition II.2.3])**.** *Pour tout espace perfectoïde S de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-débasculé $S^\sharp$ on a une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_S}$-modules*

$$0 \to \mathcal{O}_{X_S} \to \mathcal{O}_{X_S}(1) \to \mathcal{O}_{S^\sharp} \to 0. \tag{12.17}$$

Démonstration. Les constructions précédentes montrent que l'on a un morphisme $\mathcal{O}_{X_S} \to \mathcal{I}(1)$ où $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X_S}$ est le faisceau d'idéaux de $S^\sharp$, qui est un fibré en droites car les ouverts affinoïdes connexes de X_S ont des spectres adiques de domaines à idéaux principaux. Pour voir que c'est un isomorphisme, on se ramène aux points géométriques, c'est-à-dire, on suppose $S = \mathrm{Spa}\, C$ pour un corps complet algébriquement clos C. On a fixé une section globale non nulle de $\mathcal{O}_{X_C}(1)$, correspondant par la Proposition 12.12 à un $\widetilde{X} \in C^{\circ\circ}$. Explicitement,

$$f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p^i[\widetilde{X}^{q^{-i}}] \in H^0(Y_C, \mathcal{O}_{Y_C})^{\varphi=p}. \tag{12.18}$$

C'est le changement de base de la fonction logarithme sur la fibre générique adique de $\widetilde{\mathbb{G}}_{m,\mathbb{Z}_p}$, donc on se ramène à calculer son lieu d'annulation. Celui est exactement une φ-orbite de $\operatorname{Spa}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ avec un zéro simple en chacun de ces points, d'où l'assertion. $\square$

Corollaire 12.14 ([Far18, Proposition 2.12])**.** *Il existe un $\mathbb{Q}_p^\times$-torseur $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(1))^* \to$ Div^1 envoyant une section non nulle $f \in H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1))$ sur le diviseur de Cartier fermé donné par $V(f)$.*

Démonstration. On a vu que $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(1))^* \cong \operatorname{Spa}\mathbb{F}_q(\!(x^{1/p^\infty})\!)$ est représentable par un espace perfectoïde. En fait, il est naturellement isomorphe à $\operatorname{Spd}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ grâce à l'équivalence du basculement, et la Proposition 12.13 assure que le morphisme vers Div^1 est bien défini et correspond à la projection $\operatorname{Spd}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}) \to \operatorname{Spd}\mathbb{Q}_p/\varphi^{\mathbb{Z}} = \operatorname{Div}^1$. Notons que ceci est un torseur sous $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times \times p^{\mathbb{Z}}$, car $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ et vu que p agit sur $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(1))$ par φ. $\square$

12.3. **Espaces de Banach–Colmez et GAGA.** Dans cette partie, on commence par analyser les espaces de Banach–Colmez $\mathcal{BC}(\lambda)$ en tant que foncteurs sur Perf associés aux fibrés vectoriels $\mathcal{O}(\lambda)$ provenant des isocristaux simples pour $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Proposition 12.15 ([FS24, Proposition II.2.5])**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$. Alors $H^i(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(\lambda))$ s'annule si $i > 0$ (resp. $i \neq 1$) lorsque $\lambda \geq 0$ (resp. $\lambda < 0$). Alors, le morphisme $\mathcal{BC}(\lambda) \to$ $\operatorname{Spd}(\mathbb{F}_p)$ est relativement représentable en diamants localement spatiaux, partiellement propre, et cohomologiquement lisse.*

Démonstration. Pour tous les énoncés, on peut se ramener au cas $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ en remplaçant $\mathbb{Q}_p$ par une extension finie non ramifiée convenable. Concernant l'annulation de $H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(n))$ pour $n > 0$ et $S = \operatorname{Spa}(R, R^+)$ affinoïde, choisissons un pseudo-uniformisant $\varpi \in R$. En termes de la présentation de X_S comme quotient de $Y_{S,[1,q]}$ via $\varphi : Y_{S,[1,1]} \xrightarrow{\sim} Y_{S,[q,q]}$, il suffit de voir que $\varphi - p^n : B_{R,[1,q]} \to B_{R,[1,1]}$ est surjectif. Tout élément de $B_{R,[1,1]}$ s'écrit comme somme d'un élément de $B_{R,[0,1]}[\frac{1}{p}]$ et d'un élément de $[\varpi]B_{R,[1,\infty]}$, où Si $f \in B_{R,[0,1]}$, la série

$$g = \varphi^{-1}(f) + p^n\varphi^{-2}(f) + p^{2n}\varphi^{-3}(f) + \dots \tag{12.19}$$

converge dans $B_{R,[0,q]}$ et donc dans $B_{R,[1,q]}$, et $f = \varphi(g) - p^n g$. Le même raisonnement s'applique aux éléments de $B_{R,[0,1]}[\frac{1}{p}]$. D'autre part, si $f \in [\varpi]B_{R,[1,\infty]}$, la série

$$g = -p^{-n}f - p^{-2n}\varphi(f) - p^{-3n}\varphi^2(f) - \dots \tag{12.20}$$

converge dans $B_{R,[1,q]}$ et $f = \varphi(g) - p^n g$.

Pour S affinoïde, on choisit $\mathcal{O}_{X_S} \to \mathcal{O}_{X_S}(1)$ induit par un débasculé $S^\sharp$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on obtient une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_{X_S}(n) \to \mathcal{O}_{X_S}(n+1) \to \mathcal{O}_{S^\sharp} \to 0. \tag{12.21}$$

de fibrés vectoriels En appliquant ceci pour $n > 0$, on obtient inductivement une suite exacte

$$0 \to \mathcal{BC}(n)_S \to \mathcal{BC}(n+1)_S \to (\mathbb{A}^1_{S^\sharp})^\diamondsuit \to 0, \tag{12.22}$$

de faisceaux pro-étales (dont le formalisme n'a pas été vu en détail malheureusement), ce qui permet de démontrer la lissité et spatialité locale par récurrence. en utilisant [Sch17, Proposition 23.13].

Pour $n = 0$, on obtient une suite exacte

$$0 \to H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}) \to H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(1)) \to R^\sharp \to H^1(X_S, \mathcal{O}_{X_S}) \to 0 \tag{12.23}$$

où le morphisme du milieu s'identifie au logarithme du revêtement universel du groupe formel de Lubin–Tate. Ce morphisme est pro-étale localement surjectif, de noyau égal à $\mathbb{Q}_p$, ce qui montre que $\mathcal{BC}(0)$ est le faisceau constant associé à $\mathbb{Q}_p$ en tant qu'ensemble profini.

Enfin, pour le cas des entiers négatifs, on traite d'abord le cas $n = -1$, où on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to (\mathbb{A}^1_{S^\sharp})^\diamondsuit \to \mathcal{BC}(-1)_S \to 0, \tag{12.24}$$

montrant en particulier que $H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(-1)) = 0$. Comme $\mathbb{Q}_p \to (\mathbb{A}^1_{S^\sharp})^\diamondsuit$ est une immersion fermée, le résultat découle. de [Sch17, Proposition 24.2]. Pour $n < -1$, on procède par récurrence à partir de la suite

$$0 \to (\mathbb{A}^1_{S^\sharp})^\diamondsuit \to BC(-n)_S \to BC(-n+1)_S \to 0. \tag{12.25}$$

et [Sch17, Proposition 23.13]. □

On va démontrer l'annulation de Serre pour la courbe de Fargues–Fontaine.

Théorème 12.16 ([KL15, Proposition 6.2.4]). *Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un $\mathbb{F}_p$-espace perfectoïde affinoïde et soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel quelconque sur X_S. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le fibré $\mathcal{E}(n)$ est globalement engendré, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme surjectif*

$$\mathcal{O}_{X_S}^m \to \mathcal{E}(n) \tag{12.26}$$

pour un certain $m \geq 0$, et de plus $H^1(X_S, \mathcal{E}(n)) = 0$.

Démonstration. Choisissons un pseudo-uniformisant $\varpi \in R$. On écrit X_S comme le quotient de $Y_{S,[1,p]}$ par $\varphi : Y_{S,[1,1]} \xrightarrow{\sim} Y_{S,[p,p]}$. Le fibré $\mathcal{E}$ correspond alors à un $B_{R,[1,p]}$-module projectif fini $M_{[1,p]}$ muni d'un isomorphisme $\varphi_M : M_{[p,p]} \xrightarrow{\sim} M_{[1,1]}$.

On se ramène d'abord au cas où $M_{[1,q]}$ est libre. [KL15, Corollary 1.5.3]. En effet, après avoir choisi une surjection $\psi : F_{[1,p]} := B^m_{R,[1,p]} \to M_{[1,p]}$ et ajouté éventuellement un facteur libre, on peut trouver un φ-module $\varphi_F : F_{[p,p]} \xrightarrow{\sim} F_{[1,1]}$ rendant ψ équivariant et φ_F un isomorphisme.

Ainsi on peut supposer $M_{[1,p]} \cong B^m_{R,[1,p]}$, et alors $\varphi_M = A^{-1}\varphi$ pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_m(B_{R,[p^{-1},1]})$. Tordre par $\mathcal{O}_{X_S}(n)$ revient à remplacer A par Ap^n. Choisissons N, N' tels que A ait ses entrées dans $p^N W(R^+)\langle(\frac{[\varpi]}{p})^{\pm 1}\rangle^m$ et A^{-1} dans $p^{-N'}W(R^+)\langle\frac{p}{[\varpi]}, \frac{[\varpi]^{1/q}}{p}\rangle^m$. En tordant, on peut supposer $qN > N'$ et $N > 0$.

On fixe $1 < r \leq q$ et on cherche $v_1, \ldots, v_m \in (B^m_{R,[1,q]})^{\varphi = A} = H^0(X_S, \mathcal{E})$ formant une base de $B^m_{R,[r,q]}$. On choisit v_i de la forme $[\varpi]^M e_i - v'_i$ pour un entier M à choisir, avec $\|v'_i\|_{B_{R,[r,q]}} \leq q^{-M-1}$. Pour trouver les v'_i, il suffit de démontrer que le morphisme $\varphi - A : B^m_{R,[1,q]} \to B^m_{R,[1,1]}$ est surjectif de manière quantitative : pour tout $w \in p^M W(R^+)\langle(\frac{[\varpi]}{p})^{\pm 1}\rangle^m$, il existe $v \in B^m_{R,[1,q]}$ tel que $(\varphi - A)v = w$ et $\|v\|_{B_{R,[r,q]}} \leq q^{-M-1}$.

On décompose $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in [\varpi]^{N-1}p^{M-N+1}W(R^+)\langle\frac{[\varpi]}{p}\rangle^m$ et $w_2 \in [\varpi]^N p^M W(R^+)\langle\frac{[\varpi]}{p}\rangle^m$. En posant $v = \varphi^{-1}(w_1) - A^{-1}w_2$ et en estimant les normes, on vérifie que ce procédé converge (pour M suffisamment grand, ne dépendant que de N, N' et $r > 1$), fournissant le résultat souhaité. □

En particulier, pour tout espace perfectoïde affinoïde S au-dessus de $\mathbb{F}_q$, on peut définir la courbe algébrique

$$X_S^{\mathrm{alg}} = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X_S, \mathcal{O}_{X_S}(n)). \tag{12.27}$$

Il y a un morphisme bien défini $X_S \to X_S^{\mathrm{alg}}$ d'espaces spectraux localement annelés, dont le tiré en arrière définit une équivalence de catégories entre fibrés vectoriels, compatible avec la cohomologie. La preuve est assez formelle grâce à l'annulation de Serre. Grâce à GAGA, on peut démontrer que les points fermés de X_C^{alg} correspond aux points classiques de X_C, et que leurs compléments sont des spectres de domaines à idéaux principaux.

12.4. **Classification des fibrés vectoriels.** À ce stade, on peut rappeler la classification des fibrés vectoriels sur X_C ; on prend ici $S = \mathrm{Spa}\, C$ pour un corps non archimédien complet algébriquement clos C au-dessus de $\mathbb{F}_q$.

Proposition 12.17 ([FS24, Proposition II.2.10])**.** *Le morphisme $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(X_C)$, $n \mapsto \mathcal{O}_{X_C}(n)$, est un isomorphisme.*

Démonstration. Par la Proposition II.2.9, tout fibré en droites devient trivial après avoir enlevé un point fermé $x \in X_C^{\mathrm{alg}}$. Comme les anneaux locaux de X_C^{alg} sont des anneaux de valuation discrète, tout fibré en droites est de la forme $\mathcal{O}_{X_C}(n[x])$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Or $\mathcal{O}_{X_C}([x]) \cong \mathcal{O}_{X_C}(1)$ par la Proposition II.2.2, d'où le résultat. □

En particulier, on peut définir le degré de tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_C via $\deg(\mathcal{E}) = \deg(\det(\mathcal{E})) \in \mathbb{Z}$, où $\det(\mathcal{E})$ est le fibré déterminant, et $\deg : \mathrm{Pic}(X_C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ est l'isomorphisme de la proposition. On définit bien sûr aussi le rang $\mathrm{rg}(\mathcal{E})$, et donc pour tout fibré vectoriel non nul sa pente

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg(\mathcal{E})}{\mathrm{rg}(\mathcal{E})} \in \mathbb{Q}. \tag{12.28}$$

Il est facile de vérifier que cela satisfait les axiomes de Harder–Narasimhan :

(1) rang et degré sont additifs dans les suites exactes courtes ;

(2) le foncteur $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_\eta$ est fidèle et induit une équivalence de sous-catégories de noyaux pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$;

(3) la fonction μ est strictement croissante parmi les monomorphismes de même rang.

On définit les fibrés vectoriels semi-stables comme ceux pour lesquels $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ pour tout sous-fibré propre non nul $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, et stables si $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$ pour tout tel $\mathcal{F}$.

Exemple 12.18. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, le fibré $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$ est stable de pente λ. En effet, si $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$ est un sous-fibré propre non nul, avec $r = \mathrm{rk}(\mathcal{F})$ et $s = \deg(\mathcal{F})$, en passant aux r-ièmes puissances extérieures on obtient une injection

$$\det(\mathcal{F}) \cong \mathcal{O}_{X_C}(s) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_C}(r\lambda)^m, \tag{12.29}$$

ce qui implique $s \leq r\lambda$. Si l'égalité a lieu, alors r est au moins le dénominateur de λ, qui est le rang de $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$, donc $\mathcal{F}$ a le même rang que $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$. Ainsi $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$ est stable.

Proposition 12.19 ([FS24, Proposition II.2.12])**.** *Tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_C admet une unique filtration exhaustive séparante indexée par $\mathbb{Q}$ par des sous-fibrés saturés $\mathcal{E}^{\geq\lambda} \subset \mathcal{E}$, appelée la filtration de Harder–Narasimhan, dont les quotients successifs sont semi-stables de pente λ. La formation de la filtration de Harder–Narasimhan est fonctorielle en $\mathcal{E}$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $\mathrm{rg}(\mathcal{E})$ en prenant pour $\mathcal{E}^{\geq\lambda}$ la somme de tous les sous-objets de pente $\geq \lambda$. Comme la pente croître en saturant, on voit que ce sous-objet est un noyau, ce qui permet de continuer la définition de la filtration par récurrence. On vérifie aisément que les quotients successifs $\mathcal{E}^{\geq\lambda}/\mathcal{E}^{>\lambda}$ sont semi-stables de pente λ, sous peine de contredire la maximalité de $\mathcal{E}^{>\lambda}$. □

Notons que la filtration de Harder–Narasimhan est compatible avec le changement de C, ce qui se démontre aisément par récurrence sur le rang. Le théorème principal de classification des fibrés vectoriels est le suivant. Notre preuve suit les arguments de Fargues–Scholze pour se ramener à une certaine extension évitant cependant tout calcul lourd grâce à la géométrie des espaces de Banach–Colmez.

Théorème 12.20 ([FS24, Theorem II.2.14], cf. [HP04])**.** *Tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_C est isomorphe à une somme directe de fibrés de la forme $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}$. Si $\mathcal{E}$ est semi-stable de pente λ, alors $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{X_C}(\lambda)^m$ pour un certain $m \geq 0$.*

Démonstration. Par récurrence sur le rang n de $\mathcal{E}$. Par l'annulation de $H^1(X_C, \mathcal{O}_{X_C}(\lambda)) = 0$ pour $\lambda > 0$, les extensions scindent et donc le théorème vaut si $\mathcal{E}$ n'est pas semi-stable. On suppose donc $\mathcal{E}$ semi-stable de pente $\lambda = \frac{r}{s}$ avec $r > 0$ et $s \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Il suffit de trouver un morphisme non nul $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda) \to \mathcal{E}$: par stabilité de $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$, ce morphisme est nécessairement injectif (la catégorie des fibrés semi-stables de pente λ est abélienne à objets simples les stables), et le quotient sera à nouveau semi-stable de pente λ, donc isomorphe à $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)^{m-1}$ par récurrence. On conclut en observant que le Ext^1 de $\mathcal{O}_{X_C}(\lambda)$ par lui-même s'annule, d'après le calcul de la cohomologie pour le faisceau de structure. Pour trouver un morphisme non nul, on fait la réduction habituelle de travailler au-dessus de l'extension non ramifiée $\mathbb{Q}_{p^s}$ de $\mathbb{Q}_p$ et l'yoga des adjonction pour se ramener au cas où $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis $\lambda = 0$ par torsion.

On peut librement remplacer C par une extension : le faisceau des isomorphismes $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{X_C}^n$ est un quasi-torseur sous le groupe constant localement profini $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ grâce au calcul de $\mathcal{BC}(0) = \mathbb{Q}_p$. S'il y a une extension de C où l'on peut trouver une section non nulle de $\mathcal{E}$, c'est un torseur sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, représentable par un espace pro-étale sur $\mathrm{Spa}\, C$, voir [Sch17, Lemma 10.13], donc admettant une section.

Soit $d \geq 0$ minimal tel qu'il existe une injection $\mathcal{O}_{X_C}(-d) \hookrightarrow \mathcal{E}$, éventuellement après agrandissement de C ; un tel d existe par l'annulation de Serre. On veut montrer $d = 0$, donc supposons $d > 0$ par l'absurde. Par minimalité de d, le quotient $\mathcal{F} = \mathcal{E}/\mathcal{O}_{X_C}(-d)$ est un fibré vectoriel, et par hypothèse de récurrence le théorème vaut pour $\mathcal{F}$. Si $d \geq 2$, on peut par récurrence trouver une injection $\mathcal{O}_{X_C}(-d+2) \hookrightarrow \mathcal{F}$, et en prenant le tiré en arrière on définit une extension

$$\mathcal{O}_{X_C}(-d) \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}_{X_C}(-d+2), \tag{12.30}$$

soit par torsion $\mathcal{O}_{X_C}(-1) \to \mathcal{G}(d-1) \to \mathcal{O}_{X_C}(1)$. Par le lemme ci-dessous, on obtiendrait, éventuellement après agrandissement de C, une injection $\mathcal{O}_{X_C} \hookrightarrow \mathcal{G}(d-1)$, et donc une injection $\mathcal{O}_{X_C}(-d+1) \hookrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{E}$, contredisant le choix de d. Il reste le cas $d = 1$. Si $\mathcal{F}$ n'est pas semi-stable, il admet un sous-fibré $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de degré ≥ 1 et rang $\leq n-2$. En appliquant le théorème de classification au tiré en arrière $0 \to \mathcal{O}_{X_C}(-1) \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F}' \to 0$, de pente ≥ 0, on obtient que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ a une section globale. Il reste le cas $d = 1$ et $\mathcal{F}$ semi-stable, nécessairement isomorphe à $\mathcal{O}_{X_C}(\frac{1}{n-1})$. C'est le contenu du lemme suivant. $\square$

Lemme 12.21 ([FS24, Lemma II.2.15])**.** *Soit*

$$0 \to \mathcal{O}_{X_C}(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_{X_C}\left(\tfrac{1}{n}\right) \to 0 \tag{12.31}$$

une extension de fibrés vectoriels sur X_C, pour un certain $n \geq 1$. Alors $\mathcal{E}$ admet une section globale non nulle, quitte à agrandir C.

Démonstration. Supposons le contraire. En passant aux espaces de Banach–Colmez, on obtient une injection

$$f : \mathcal{BC}\left(\tfrac{1}{n}\right)_C \hookrightarrow \mathcal{BC}(-1)_C. \tag{12.32}$$

L'image ne peut pas être contenue dans les points classiques (ceux-ci forment un sous-ensemble totalement discontinu, alors que la source est connexe et non réduite à un point) ; l'image contient donc un point non classique. Quitte à agrandir C, l'image contient un ouvert non vide de $\mathcal{BC}(-1) = (\mathbb{A}^1_{C^\sharp})^\diamondsuit/\mathbb{Q}_p$ et le comportement analogue des points non classiques de $\mathbb{A}^1_{C^\sharp}$. En translatant cet ouvert à l'origine et en rescalant par l'action contractante de $\mathbb{Q}_p^\times$, on conclut que f est surjectif, donc un isomorphisme.

Mais la théorie des groupes p-divisibles permet de voir que $\mathcal{BC}(1/n)_C$ est représentable par un perfectoïde. Cependant, $\mathcal{BC}(\mathcal{O}_{X_C}(-1)[1])$ ne peut pas être un espace perfectoïde, car il en est de même de son recouvrement pro-étale $(\mathbb{A}^1_{C^\sharp})^\diamondsuit$. $\square$

12.5. **Fibrés vectoriels en familles.** Maintenant, on va passer au cas relatif et étudier la variation de la filtration de Harder–Narasimhan suivant les points de la courbe. En utilisant l'amplitude de $\mathcal{O}(1)$, on peut maintenant démontrer le résultat suivant sur les espaces de Banach–Colmez relatifs.

Proposition 12.22 ([FS24, Proposition II.2.16])**.** *Soit S un $\mathbb{F}_p$-espace perfectoïde et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X_S. Alors l'espace de Banach–Colmez $\mathcal{BC}(\mathcal{E})_S$ est un diamant localement spatial, partiellement propre au-dessus de S. De plus, son projectivisé $\mathcal{BC}(\mathcal{E})^*_S/\mathbb{Q}_p^\times$ est un diamant localement spatial, propre au-dessus de S.*

Démonstration. L'annulation de Serre fournit une présentation $\mathcal{O}_{X_S}(-n')^{m'} \to \mathcal{O}_{X_S}(-n)^m \to \mathcal{E}^\vee$ avec $n, n' > 0$. En dualisant, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_{X_S}(n)^m \to \mathcal{O}_{X_S}(n')^{m'}. \tag{12.33}$$

Cela implique que $\mathcal{BC}(\mathcal{E})_S \subset \mathcal{BC}(n)^m_S$ est un sous-espace fermé, d'où la première partie par une proposition ci-dessus. Pour la seconde partie, on peut supposer S qcqs. Il suffit de démontrer l'analogue pour $\mathcal{BC}(\mathcal{E})^*_S/p^{\mathbb{Z}}$, car l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ est libre. (en utilisant [Sch17, Proposition 11.24]). Ceci résulte d'un lemme général de Fargues–Scholze sur les actions de groupes contractants sur les espaces spectraux localement taut. Les axiomes à vérifier se réduisent au cas de $\mathbb{A}^1_{S^\sharp}$ par dévissage. $\square$

Théorème 12.23 ([KL15, Theorems 7.4.5, 7.4.9, 7.3.7]). *Soit S un $\mathbb{F}_p$-espace perfectoïde et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X_S de rang constant n.*

(1) La fonction qui à un point géométrique $\operatorname{Spa} C \to S$ *associe le polygone de Harder–Narasimhan de $\mathcal{E}|_{X_C}$ est semi-continue supérieurement.*

(2) Supposons que le polygone de Harder–Narasimhan de $\mathcal{E}$ est constant. Alors il existe une filtration de Harder–Narasimhan globale $\mathcal{E}^{\geq\lambda} \subset \mathcal{E}$, spécialisant en la filtration de Harder–Narasimhan en chaque point. De plus, quitte à remplacer S par un recouvrement pro-étale, elle scinde en $\oplus_{\lambda\in\mathbb{Q}}\mathcal{E}^\lambda$ avec $\mathcal{E}^\lambda \cong \mathcal{O}_{X_S}(\lambda)^{n_\lambda}$ et $n_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Démonstration. Notons que le polygone de Harder–Narasimhan peut être décrit comme l'enveloppe convexe des points (i, d_i) pour $i = 0, \dots, n$, où d_i est le plus grand entier tel que $H^0(X_C, (\wedge^i\mathcal{E})(-d_i)|_{X_C}) \neq 0$. Donc, pour la partie (i), il suffit de montrer que pour tout fibré vectoriel $\mathcal{F}$ sur X_S, le lieu des points géométriques $\operatorname{Spa} C \to S$ pour lesquels $H^0(X_C, \mathcal{F}|_{X_C}) \neq 0$ est fermé dans S. Ce lieu est précisément l'image de $\mathbb{P}(\mathcal{BC}(\mathcal{F})) \to S$ Comme ce morphisme est propre par la Proposition 12.22, son image est fermée. Pour la constance locale du dernier sommet du polygone, on applique le même raisonnement au dual du déterminant de $\mathcal{E}$.

Pour la partie (ii), il suffit de montrer que, quitte à remplacer S par un recouvrement, il existe un isomorphisme $\mathcal{E} \cong \bigoplus_\lambda \mathcal{O}_{X_S}(\lambda)^{n_\lambda}$. En effet, la filtration de Harder–Narasimhan globale existera alors et descend nécessairement à la base original. La trivialisation de chaque $\mathcal{E}^\lambda$ est un torseur sous un groupe localement profini, donc réalisable après un recouvrement pro-étale, voir [Sch17, Lemma 10.13]. La capacité à scinder la filtration découle alors du fait que les $\mathcal{BC}(\lambda)_S$ sont des diamants.

On procède par récurrence sur le rang de $\mathcal{E}$. Soit λ la pente maximale de $\mathcal{E}$. On affirme que localement sur S, il existe un morphisme $\mathcal{O}_{X_S}(\lambda) \to \mathcal{E}$ non nul en chaque fibre. Tordant par λ, on peut se ramener au cas où $\lambda = 0$. Trouver un tel morphisme équivaut à voir que $\mathcal{BC}(\mathcal{E})^* \to \mathbb{P}(\mathcal{BC}(\mathcal{E})) \to S$ est un recouvrement au-dessus duquel un tel morphisme existe : le premier morphisme est un $\mathbb{Q}_p^\times$-torseur, donc un pro-étale, tandis que le second est propre et surjectif sur les points géométriques par hypothèse sur la pente maximale, donc aussi surjectif globalement par [Sch17, Lemma 12.11]. Le morphisme dual $\mathcal{E}^\vee \to \mathcal{O}_{X_S}$ est surjectif (vérifiable sur les points géométriques), donc le conoyau de $\mathcal{O}_{X_S} \to \mathcal{E}$ est un fibré vectoriel $\mathcal{E}'$ de polygone de Harder–Narasimhan constant. Par récurrence, et en utilisant encore le fait que les $\mathcal{BC}(\lambda)$ sont des diamants, on obtient l'isomorphisme cherché. □

Notons explicitement le corollaire suivant.

Corollaire 12.24 ([KL15, Theorem 8.5.12]). *Soit S un espace perfectoïde. La catégorie des $\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux pro-étales $\mathbb{L}$ est équivalente à la catégorie des fibrés vectoriels sur X_S dont le polygone de Harder–Narasimhan est identiquement 0, via $\mathbb{L} \mapsto \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{X_S}$.*

Démonstration. La pleine fidélité résulte de la descente pro-étale (pour se ramener au cas où $\mathbb{L}$ est trivial) et du calcul $\mathcal{BC}(0) = \mathbb{Q}_p$ de la Proposition 12.19. La surjectivité essentielle découle du Theorem 12.23. □

Références

[BGR84] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean Analysis : A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, volume 261 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1984. 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21

[BV18] Kevin Buzzard and Alain Verberkmoes. *Stably uniform affinoids are sheafy*, volume 740. 2018. Preprint arXiv:1404.7020. 4, 36

[Col02] Pierre Colmez. *Espaces de Banach de dimension finie*, volume 1. 2002. 23

[Far18] Laurent Fargues. From local class field to the curve and vice versa. In *Algebraic Geometry : Salt Lake City 2015*, volume 97 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 181–198. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018. 5, 55

[Fon12] Jean-Marc Fontaine. Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids, 2012. Séminaire Bourbaki, Exposé 1057. 41

[FS24] Laurent Fargues and Peter Scholze. *Geometrization of the Local Langlands Correspondence*, volume to appear of *Astérisque*. 2024. arXiv:2102.13459. 5, 54, 55, 57, 58, 59

[HP04] Urs Hartl and Richard Pink. Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc. *Compos. Math.*, 140(3):689–716, 2004. 58

[Hub93] Roland Huber. *Continuous valuations*, volume 212. 1993. 3, 25, 31

[Hub94] Roland Huber. *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, volume 217. 1994. 3, 30

[Ked16] Kiran S. Kedlaya. Noetherian properties of Fargues–Fontaine curves. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8):2544–2567, 2016. 51

[KL15] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu. Relative p-adic Hodge theory : Foundations. *Astérisque*, (371):239 pp., 2015. 56, 60

[Sch12] Peter Scholze. Perfectoid spaces. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 116:245–313, 2012. 4

[Sch17] Peter Scholze. Étale cohomology of diamonds, 2017. Preprint, available at `https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/EtCohDiamonds.pdf`. 56, 58, 59, 60

[SW20] Peter Scholze and Jared Weinstein. *Berkeley Lectures on p-adic Geometry*, volume 207 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2020. 45

Email address : `lourenco@math.univ-paris13.fr`