FICHE DE RÉVISION POUR L'EXAMEN

JOÃO LOURENÇO

Résumé. Le présent document est un résumé du cours d'Algèbre 2 : Introduction à l'algèbre linéaire de Christian Ausoni à l'Institut Galilée – L1 Informatique, Mathématiques et double licence pendant le second semestre de l'année scolaire 2025–26. Le but est de présenter les principales définitions, lemmes, propositions, théorèmes et exemples du cours. Il est destiné à servir de fiche de révision pour la préparation à l'examen. Pendant la révision, il convient de s'appuyer sur ce document pour s'assurer de la compréhension des notions essentielles.

Table des matières

1. Le corps des nombres complexes 2
1.1. Généralités sur les corps 2
1.2. Construction et propriétés de $\mathbb{C}$ 2
1.3. Exponentielle complexe et forme trigonométrique 3
1.4. Racines et équations du second degré 4
2. Espaces vectoriels et applications linéaires 5
2.1. Structure d'espace vectoriel 5
2.2. Sous-espaces vectoriels 5
2.3. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré 6
2.4. Intersection, union et somme de sous-espaces 6
2.5. Applications linéaires 7
2.6. Isomorphismes, noyau et image 7
2.7. Algèbre des endomorphismes 8
3. Systèmes d'équations linéaires 8
3.1. Caractérisation des applications linéaires $K^n \to K^p$ 8
3.2. Équations et systèmes linéaires 8
3.3. Opérations élémentaires et forme échelonnée 9
3.4. Algorithme de Gauß 10
3.5. Description des solutions 11
3.6. Systèmes de Cramer 11
3.7. Systèmes à paramètres 11
4. Points clés pour l'examen 12

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps commutatif (le plus souvent $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Le corps des nombres complexes

1.1. Généralités sur les corps.

Définition 1.1 (Groupe)**.** Soit G un ensemble et $\star : G \times G \to G$ une opération binaire. On dit que $(G, \star)$ est un *groupe* si :

(a) $\star$ est associative : $\forall x, y, z \in G,\ (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;

(b) $\star$ admet un élément neutre : $\exists e \in G, \forall x \in G,\ e \star x = x = x \star e$;

(c) tout élément admet un inverse : $\forall x \in G, \exists y \in G,\ x \star y = e = y \star x$.

Le groupe est dit *abélien* ou *commutatif* si de plus $\star$ est commutative.

Définition 1.2 (Anneau commutatif)**.** Un ensemble $(A, +, \cdot)$ muni de deux opérations binaires est un *anneau commutatif* si :

(a) $(A, +)$ est un groupe abélien (neutre 0) ;

(b) la multiplication est associative et commutative ;

(c) la multiplication est distributive sur l'addition ;

(d) la multiplication admet un élément neutre $1 \in A$.

Définition 1.3 (Corps commutatif)**.** Un anneau commutatif $(A, +, \cdot)$ est un *corps commutatif* si $0 \neq 1$ et si tout élément non nul est inversible pour la multiplication.

Définition 1.4 (Sous-corps)**.** Soit $(L, +, \cdot)$ un corps et $K \subset L$. On dit que K est un *sous-corps* de L si :

(a) $\forall a, b \in K,\ a + b \in K$ et $a \cdot b \in K$;

(b) si $a \in K$ alors $-a \in K$, et si $a \neq 0$ alors $a^{-1} \in K$;

(c) $1 \in K$.

Définition 1.5 (Homomorphisme de corps)**.** Une application $f : K \to L$ entre deux corps est un *homomorphisme de corps* si :

(a) $\forall a, b \in K,\ f(a + b) = f(a) + f(b)$;

(b) $\forall a, b \in K,\ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;

(c) $f(1_K) = 1_L$.

Un *isomorphisme de corps* est un homomorphisme bijectif ; un *automorphisme* est un isomorphisme $K \to K$.

Lemme 1.6. *Tout homomorphisme de corps $f : K \to L$ est injectif, et $f(K)$ est un sous-corps de L.*

1.2. Construction et propriétés de $\mathbb{C}$.

Définition 1.7. On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des opérations :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Théorème 1.8. *$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, de zéro $(0, 0)$ et d'unité $(1, 0)$. L'opposé de (a, b) est $(-a, -b)$, et si $(a, b) \neq (0, 0)$, son inverse est*

$$(a, b)^{-1} = \left(\tfrac{a}{a^2 + b^2},\ -\tfrac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

De plus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ r \mapsto (r, 0)$ est un homomorphisme de corps, et $(0, 1)^2 = -(1, 0)$.

Définition 1.9. Le corps $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ est appelé *corps des nombres complexes* et noté $\mathbb{C}$. On pose $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$, si bien que $i^2 = -1$ et tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

appelée *forme algébrique* ou *forme cartésienne* de z.

Définition 1.10 (Partie réelle et imaginaire)**.** Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on appelle *partie réelle* de z le réel $\mathrm{re}(z) := a$, et *partie imaginaire* le réel $\mathrm{im}(z) := b$.

Lemme 1.11. *Tout nombre réel $a \neq 0$ possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$:*

— $\sqrt{a}$ *et* $-\sqrt{a}$ *si* $a > 0$ *;*

— $\sqrt{-a}\, i$ *et* $-\sqrt{-a}\, i$ *si* $a < 0$*.*

Définition 1.12 (Conjugaison)**.** On appelle *conjugaison* l'application $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a + bi \mapsto a - bi$. On note $\overline{z} = c(z)$.

Théorème 1.13. *La conjugaison $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$. De plus :*

(a) $c \circ c = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ *(involution) ;*

(b) $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$ *;*

(c) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{re}(z)$ *et* $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{im}(z)\, i$*.*

Définition 1.14 (Module)**.** Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on définit le *module* de z par $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.15 (Propriétés du module)**.** *Pour tous $w, z \in \mathbb{C}$:*

(a) $|z|^2 = z\overline{z}$*, donc* $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ *;*

(b) $|z| = 0 \iff z = 0$ *;*

(c) $|\,\mathrm{re}(z)| \leqslant |z|,\ |\,\mathrm{im}(z)| \leqslant |z|,\ |\overline{z}| = |z|$ *;*

(d) $|wz| = |w||z|$ *et* $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ *;*

(e) $|w + z| \leqslant |w| + |z|$ *(inégalité triangulaire) ;*

(f) $\big||w| - |z|\big| \leqslant |w - z|$ *(inégalité triangulaire inverse).*

1.3. **Exponentielle complexe et forme trigonométrique.**

Lemme 1.16. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$. On note*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 1.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)**.** *Pour tous $w, z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$:*

(a) $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ *;*

(b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ *;*

(c) $\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x)$ *;*

(d) $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \qquad$ *(*formule d'Euler*).*

Corollaire 1.18 (Formules d'addition)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Corollaire 1.19. *Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$: $e^{a+bi} = e^a\big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$.*

Définition 1.20 (Sous-groupe)**.** Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e. Un sous-ensemble $H \subset G$ est un *sous-groupe* si :

(a) $\forall x, y \in H,\ x \star y \in H$;
(b) $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$;
(c) $e \in H$.

Proposition 1.21 (Le cercle unité)**.** *$U(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$. L'inverse de $z \in U(1)$ est $z^{-1} = \overline{z}$. On l'appelle le* groupe unitaire *ou* cercle unité.

Proposition 1.22. *L'application $\mathbb{R} \to U(1),\ x \mapsto e^{ix}$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur $U(1)$, périodique de période 2π :*

$$e^{ix} = e^{iy} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2\pi k.$$

Corollaire 1.23 (Formule de Moivre)**.** *Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n.$$

Définition 1.24 (Argument et forme trigonométrique)**.** Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\frac{z}{|z|} = e^{i\alpha}$. On appelle *argument* de z la classe $[\alpha] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, notée $\arg(z)$. Le couple $(|z|, \arg(z))$ constitue les *coordonnées polaires* de z, et $z = |z|\, e^{i\alpha} = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ est la *forme trigonométrique* de z.

Proposition 1.25 (Calculs en forme trigonométrique)**.** *Si $w = re^{i\alpha}$, $z = se^{i\beta}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$w \cdot z = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}, \quad z^{-1} = s^{-1}e^{-i\beta}, \quad \tfrac{w}{z} = \tfrac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}, \quad w^n = r^n e^{in\alpha}.$$

1.4. Racines et équations du second degré.

Corollaire 1.26 (Racines n-èmes)**.** *Soit $z = re^{i\alpha} \neq 0$ et $n \geqslant 2$. Alors z possède exactement n racines n-èmes dans $\mathbb{C}$, données par*

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\alpha + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Théorème 1.27 (Équation du second degré complexe)**.** *Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.*

— *Si $\Delta = 0$: unique solution $z = \frac{-b}{2a}$.*
— *Si $\Delta \neq 0$: notons $u, -u$ les deux racines carrées de Δ. Les solutions sont $\frac{-b+u}{2a}$ et $\frac{-b-u}{2a}$.*

Définition 1.28 (Racines de l'unité)**.** Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, appelés *racines n-èmes de l'unité.*

Proposition 1.29. *$\mu_n \subset U(1)$ est un sous-groupe fini de cardinal n. En posant $\zeta_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on a $\mu_n = \{\zeta_n^k : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.*

2. Espaces vectoriels et applications linéaires

2.1. Structure d'espace vectoriel.

Définition 2.1 (Action d'un corps)**.** Soit $(G, \star)$ un groupe commutatif et K un corps. Une *action* de K sur G est une application $K \times G \to G$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, vérifiant pour tous $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x \star y) &= (\lambda \cdot x) \star (\lambda \cdot y), \\ (\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda \cdot x) \star (\mu \cdot x), \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda\mu) \cdot x, \\ 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

Définition 2.2 (K-espace vectoriel)**.** Un *K-espace vectoriel* est un groupe abélien $(E, +)$ muni d'une action de K. Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de K des *scalaires*.

Lemme 2.3. *Soit E un K-espace vectoriel. Pour tous $\lambda \in K$ et $x \in E$:*

(a) $\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0$ *ou* $x = 0_E)$ *;*

(b) $(-1) \cdot x = -x$.

Définition 2.4 (Espace K^n)**.** Pour $n \geqslant 1$, on munit K^n des opérations composante par composante :

$$(x_j)_j + (y_j)_j = (x_j + y_j)_j, \qquad \lambda \cdot (x_j)_j = (\lambda x_j)_j.$$

Proposition 2.5. *Pour tout $n \geqslant 1$, K^n est un K-espace vectoriel, de zéro* $(0, \dots, 0)$ *et d'opposé* $-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Définition 2.6 (Espace des fonctions)**.** Soit X un ensemble. On définit sur $\mathcal{F}(X, K)$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Proposition 2.7. *$\mathcal{F}(X, K)$ est un K-espace vectoriel, de zéro l'application nulle $x \mapsto 0$, et d'opposé $(-f)(x) = -f(x)$.*

2.2. Sous-espaces vectoriels.

Définition 2.8 (Sous-espace vectoriel)**.** Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

(a) $0 \in F$;

(b) $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$ (stabilité par addition) ;

(c) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$ (stabilité par l'action).

Proposition 2.9. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F muni des opérations restreintes est lui-même un K-espace vectoriel.*

Lemme 2.10. *Si $F \subset E$ sous-espace et $G \subset F$, alors G est sous-espace de F ssi G est sous-espace de E.*

Définition 2.11 (Support)**.** Pour $f : X \to K$, le *support* de f est $\mathrm{Supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. On note $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(X, K)$ le sous-ensemble des applications à support fini.

Proposition 2.12. *$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(X, K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, K)$.*

2.3. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré.

Définition 2.13 (Combinaison linéaire et Vect)**.** Soit E un K-espace vectoriel, $S \subset E$. Une *combinaison linéaire* d'éléments de S est un vecteur de la forme

$$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N},\ x_i \in S,\ \lambda_i \in K.$$

Pour $n = 0$, on obtient la *combinaison linéaire vide*, qui vaut 0. On pose

$$\mathrm{Vect}(S) = \{v \in E : v \text{ est combinaison linéaire d'éléments de } S\}.$$

Proposition 2.14. *Soit E un K-espace vectoriel et $S \subset E$.*

- *(a)* $\mathrm{Vect}(S)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
- *(b) Si $F \subset E$ est un sous-espace contenant S, alors* $\mathrm{Vect}(S) \subset F$.

Définition 2.15. $\mathrm{Vect}(S)$ est appelé le *sous-espace vectoriel engendré par S*. On a $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ et, pour $v \neq 0$, $\mathrm{Vect}(\{v\})$ est appelée la *droite vectorielle engendrée par v*.

2.4. Intersection, union et somme de sous-espaces.

Proposition 2.16. *L'intersection de deux (ou d'une famille de) sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 2.17. *Soit E un K-espace vectoriel, $S \subset E$, et $\Omega_S = \{V \subset E : V \text{ sous-espace}, S \subset V\}$. Alors*

$$\mathrm{Vect}(S) = \bigcap_{V \in \Omega_S} V.$$

En d'autres termes, $\mathrm{Vect}(S)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant S.*

Proposition 2.18 (Union de sous-espaces)**.** *Soit F, G sous-espaces de E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Définition 2.19 (Somme de sous-espaces)**.** Soit F, G sous-espaces de E. La *somme* $F+G$ est

$$F + G := \mathrm{Vect}(F \cup G).$$

Plus généralement, pour $F_1, \ldots, F_n$ sous-espaces, $F_1 + \cdots + F_n = \mathrm{Vect}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$.

Proposition 2.20. *Soit F, G sous-espaces de E. Alors*

$$F + G = \{v \in E : \exists y \in F, \exists z \in G,\ v = y + z\}.$$

Plus généralement, $F_1 + \cdots + F_n = \{v = x_1 + \cdots + x_n : x_i \in F_i\}$.

Remarque 2.21. La somme de sous-espaces est commutative et associative : $F + G = G + F$ et $(F + G) + H = F + (G + H)$. De plus $\mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T) = \mathrm{Vect}(S \cup T)$.

2.5. **Applications linéaires.**

Définition 2.22 (Application linéaire)**.** Soit E, F des K-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est K-*linéaire* si, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in K$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On note $\mathcal{L}(E,F) = \{f \in \mathcal{F}(E,F) : f \text{ est } K\text{-linéaire}\}$.

Une application linéaire $E \to E$ est un *endomorphisme*.

Lemme 2.23 (Caractérisations de la linéarité)**.** *Pour $f : E \to F$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) f est K-linéaire ;

(b) $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;

(c) f préserve toute combinaison linéaire : $f\big(\sum \lambda_i x_i\big) = \sum \lambda_i f(x_i)$.

Lemme 2.24. *Si $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in K$, alors $f+g$ et λf sont dans $\mathcal{L}(E,F)$.*

Proposition 2.25. *$\mathcal{L}(E,F)$, muni de l'addition et de l'action héritées de $\mathcal{F}(E,F)$, est un K-espace vectoriel.*

Proposition 2.26 (Composition)**.** *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$. De plus, la composition $\circ : \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,G)$ est linéaire en chaque variable :*

$$(\lambda g + \mu g') \circ f = \lambda(g \circ f) + \mu(g' \circ f), \qquad g \circ (\lambda f + \mu f') = \lambda(g \circ f) + \mu(g \circ f').$$

2.6. **Isomorphismes, noyau et image.**

Proposition 2.27. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$. Ainsi, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) f est bijective ;

(b) $\exists g \in \mathcal{L}(F,E) : g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Définition 2.28 (Isomorphisme)**.** $f : E \to F$ linéaire bijective est un *isomorphisme*. E et F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $E \to F$. Un isomorphisme $E \to E$ est un *automorphisme*.

Définition 2.29 (Image, noyau, pré-image)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $V \subset E$ et $W \subset F$ des sous-espaces.

$$\begin{aligned} f(V) &= \{y \in F : \exists x \in V,\ y = f(x)\} \subset F, \\ \mathrm{Im}(f) &:= f(E), \\ f^{-1}(W) &= \{x \in E : f(x) \in W\} \subset E, \\ \mathrm{Ker}(f) &:= f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : f(x) = 0\} \subset E. \end{aligned}$$

Proposition 2.30. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $V \subset E$ et $W \subset F$ des sous-espaces.*

(a) $f(V)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de F.

(b) $f^{-1}(W)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 2.31 (Caractérisation par noyau et image)**.** *Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$:*

(a) *f est surjective ssi* $\mathrm{Im}(f) = F$ *;*

(b) *f est injective ssi* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Définition 2.32. Une application linéaire surjective est appelée *épimorphisme* ; injective, *monomorphisme.*

2.7. **Algèbre des endomorphismes.**

Définition 2.33 (K-algèbre)**.** Une *K-algèbre* est un K-espace vectoriel A muni d'un produit $\diamond : A \times A \to A$ associatif, bilinéaire, avec élément neutre $1 \in A$. Elle est *commutative* si $\diamond$ est commutatif. Un élément $x \in A$ est *inversible* s'il existe $y \in A$ avec $x \diamond y = 1 = y \diamond x$; cet inverse est alors unique et noté x^{-1}.

Théorème 2.34. *Pour tout K-espace vectoriel E, la composition munit $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ d'une structure de K-algèbre, d'unité* id_E.

Corollaire 2.35. *Le sous-ensemble* $\mathrm{GL}(E) := \{f \in \mathcal{L}(E) : f \text{ inversible}\}$ *est un groupe pour la composition, appelé* groupe linéaire général *ou* groupe des automorphismes *de E.*

Remarque 2.36. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$: f inversible dans $\mathcal{L}(E)$ ssi f est un automorphisme de E.

3. Systèmes d'équations linéaires

3.1. **Caractérisation des applications linéaires $K^n \to K^p$.**

Lemme 3.1. *Soit $f \in \mathcal{F}(K^n, K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est K-linéaire ;*

(b) *il existe $a_1, \ldots, a_n \in K$ uniques tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$.*

De plus, $a_j = f(e_j)$ où $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (le 1 en position j).

Lemme 3.2. *Soit $f \in \mathcal{F}(K^n, K^p)$ et $f_i : K^n \to K$ ses composantes ($f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$). Alors*

$$f \text{ est } K\text{-linéaire} \iff \forall i,\ f_i \text{ est } K\text{-linéaire.}$$

Corollaire 3.3. *Pour $f \in \mathcal{F}(K^n, K^p)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est K-linéaire ;*

(b) *il existe une unique famille $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ dans K telle que*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j \right).$$

3.2. **Équations et systèmes linéaires.**

Définition 3.4 (Équation linéaire)**.** Une *équation linéaire* à n inconnues est une équation de la forme

$$(E) \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j = b,$$

avec $a_j, b \in K$ fixés. Les a_j sont les *coefficients*, b le *second membre.* Elle est *homogène* si $b = 0$. On pose

$$\mathrm{Sol}(E) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n : \sum a_j x_j = b\}.$$

Définition 3.5 (Système linéaire)**.** Un *système linéaire* à p équations et n inconnues est une famille $S = (E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'équations linéaires aux mêmes inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Le *système homogène associé* S_0 est obtenu en remplaçant b par 0. L'ensemble des solutions est

$$\mathrm{Sol}(S) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Sol}(E_i).$$

Le système est *compatible* si $\mathrm{Sol}(S) \neq \varnothing$.

Définition 3.6 (Application linéaire associée)**.** L'*application linéaire associée* à S est

$$f : K^n \to K^p,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_j a_{1j}x_j, \dots, \sum_j a_{pj}x_j \right).$$

Proposition 3.7. *Soit S un système de second membre b et f son application linéaire associée. Alors*

$$\mathrm{Sol}(S) = f^{-1}(\{b\}).$$

En particulier, si S est homogène : $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Ker}(f)$.

Corollaire 3.8. *L'ensemble des solutions d'un système homogène est un sous-espace vectoriel de K^n. En particulier,* $0 \in \mathrm{Sol}(S_0)$ *(tout système homogène est compatible).*

Proposition 3.9 (Structure affine des solutions)**.** *Soit S un système compatible et $a \in$* $\mathrm{Sol}(S)$ *une solution particulière. Alors*

$$\mathrm{Sol}(S) = \{x \in K^n : \exists v \in \mathrm{Sol}(S_0),\ x = a + v\}.$$

Autrement dit : les solutions de S sont $a+$ solutions du système homogène associé.

Remarque 3.10 (Sous-espace affine)**.** Si $V \subset E$ est un sous-espace et $a \in E$, on appelle *sous-espace affine de direction V passant par a* l'ensemble $A = \{a + v : v \in V\}$. Si $a \notin V$, A n'est pas un sous-espace vectoriel (car $0 \notin A$).

3.3. **Opérations élémentaires et forme échelonnée.**

Définition 3.11 (Systèmes équivalents)**.** Deux systèmes S et S' sont *équivalents* si $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S')$.

Définition 3.12 (Opérations élémentaires)**.** Les *opérations élémentaires* sur un système $S = (E_i)$ sont :

(a) *Échange* de deux équations : $(E_i \leftrightarrow E_j)$;
(b) *Cadrage* : multiplication d'une équation par un scalaire non nul, $(E_i \leftarrow \lambda E_i)$, $\lambda \neq 0$;
(c) *Remplacement* : $(E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j)$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$.

Proposition 3.13. *Si S' est obtenu à partir de S par une suite finie d'opérations élémentaires, alors S et S' sont équivalents.*

Remarque 3.14 (Avertissement)**.** **Attention** : effectuer simultanément deux remplacements de la forme $(E_i \leftarrow E_i+\lambda E_j)$ et $(E_j \leftarrow E_j+\mu E_i)$ ne correspond pas à une succession d'opérations élémentaires et peut changer l'ensemble des solutions. La plupart des erreurs dans la résolution de systèmes sont de cette forme.

Définition 3.15 (Coefficient de tête)**.** Pour une équation non nulle E_i :

— si tous les a_{ij} sont nuls, le coefficient de tête est b_i ;

— sinon, si $k = \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$, le coefficient de tête est a_{ik}.

Définition 3.16 (Forme échelonnée (réduite))**.** Un système S est *échelonné* si :

(1) les équations non nulles sont placées au-dessus des équations nulles ;

(2) si a_{ij} et $a_{k\ell}$ sont deux coefficients de tête avec $i < k$, alors $j < \ell$;

(3) il y a au plus une équation de la forme $0 = b_i$ (avec $b_i \neq 0$), située au-dessus des équations nulles.

S est *échelonné réduit* s'il est échelonné et de plus :

(4) chaque coefficient de tête vaut 1 ;

(5) le coefficient de tête d'une ligne non nulle est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Théorème 3.17. *Tout système linéaire S est équivalent à un système échelonné réduit, obtenu par un nombre fini d'opérations élémentaires. Si S est compatible, ce système échelonné réduit est* unique*.*

3.4. **Algorithme de Gauß.**

Définition 3.18 (Algorithme de Gauß)**.** On applique successivement les phases suivantes.

Phase de descente (itérative, produit un système échelonné S_e) :

(1) *Choix du pivot* : dans la colonne de gauche, choisir i minimal avec $a_{i1} \neq 0$; si la colonne est nulle, passer à la suivante.

(2) *Échange* : si $i \neq 1$, appliquer $(E_1 \leftrightarrow E_i)$.

(3) *Remplacement* : pour chaque $k > 1$, appliquer $(E_k \leftarrow E_k - \lambda E_1)$ pour annuler le coefficient de x_1 dans E_k.

(4) *Itération* : si un pivot apparaît en second membre, le système est incompatible. Sinon, répéter sur le sous-système obtenu en ignorant la première ligne et la première colonne.

Phase de remontée (produit la forme échelonnée réduite S_{er}) :

(5) *Cadrage* : pour chaque équation non nulle de coefficient de tête λ, appliquer $(E_i \leftarrow \lambda^{-1}E_i)$.

(6) *Remplacement* : en partant de la dernière ligne non nulle, annuler les coefficients au-dessus de chaque coefficient de tête.

3.5. **Description des solutions.**

Remarque 3.19 (Pivots et variables libres)**.** Après l'algorithme, les inconnues correspondant aux coefficients de tête des lignes non nulles sont les *pivots* ; les autres sont les *variables libres* ou *paramètres*.

Si S_{er} est compatible avec k pivots (et n inconnues), il y a $n-k$ variables libres, et :

— on a besoin de $n-k$ paramètres pour décrire $\mathrm{Sol}(S)$;

— $\mathrm{Sol}(S_0) = \mathrm{Vect}(\{v_1, \dots, v_{n-k}\})$ avec $n-k$ vecteurs.

Si $k = n$: $\mathrm{Sol}(S_0) = \{0\}$ et $\mathrm{Sol}(S) = \{a\}$ (solution unique).

Remarque 3.20 (Nombre de solutions)**.** Un système S possède soit :

— aucune solution (incompatible) ;

— une unique solution (S compatible et $k = n$) ;

— autant de solutions que d'éléments de $\mathrm{Vect}(\{v_1, \dots, v_{n-k}\})$ (si $k \geqslant 1$ et $k < n$). Pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $0 < k < n$, il y a une infinité de solutions.

Remarque 3.21 (Descriptions paramétrique et affine)**.** On distingue deux descriptions équivalentes de $\mathrm{Sol}(S)$:

— *Description paramétrique* : on exprime les solutions par $n-k$ paramètres $s, t, \dots \in K$.

— *Description affine* : $\mathrm{Sol}(S) = \{a + v : v \in \mathrm{Vect}(\{v_1, \dots, v_{n-k}\})\}$, avec $a \in \mathrm{Sol}(S)$ solution particulière.

3.6. **Systèmes de Cramer.**

Définition 3.22 (Système de Cramer)**.** Un système S à n équations et n inconnues (mêmes nombres) est un *système de Cramer* si l'application linéaire associée $f : K^n \to K^n$ est un isomorphisme.

Proposition 3.23 (Caractérisations de Cramer)**.** *Pour un système S à n équations et n inconnues, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) S est un système de Cramer ;

(b) pour tout second membre $c \in K^n$, le système possède une unique solution ;

(c) S_{er} possède n pivots, tous dans les membres de gauche.

3.7. **Systèmes à paramètres.**

Remarque 3.24. On considère parfois une famille (S_λ) de systèmes dépendant d'un paramètre $\lambda \in K$. Il faut alors résoudre selon les valeurs de λ.

Attention : ne jamais diviser par une quantité dépendant de λ qui pourrait s'annuler, ni cadrer par un facteur possiblement nul. Il faut traiter séparément les valeurs de λ pour lesquelles certains coefficients s'annulent.

Remarque 3.25 (Vérification des solutions)**.** Après résolution d'un système S et description de $\mathrm{Sol}(S)$ sous forme affine $\{a + v : v \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_\ell)\}$, il est recommandé de vérifier que :

— a est bien solution de S ;

— chaque v_i est solution du système homogène S_0.

4. Points clés pour l'examen

(1) **Corps** $\mathbb{C}$: formes algébrique, trigonométrique, exponentielle ; module, conjugaison, argument ; racines n-èmes et équation du second degré.

(2) **Espaces vectoriels** : axiomes, exemples fondamentaux (K^n, $\mathcal{F}(X,K)$, $\mathcal{F}_{\text{fin}}(X,K)$).

(3) **Sous-espaces** : trois conditions ; intersection (est un s.e.v.), union (pas en général), somme $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$.

(4) **Vect**(S) : plus petit sous-espace contenant S.

(5) **Applications linéaires** : caractérisation par combinaison linéaire, composition, $\mathcal{L}(E,F)$, isomorphismes.

(6) **Noyau et image** : sous-espaces ; f injective $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}$; f surjective $\iff \text{Im}(f) = F$.

(7) **Algèbre** $\mathcal{L}(E)$ **et groupe** $\text{GL}(E)$.

(8) **Systèmes linéaires** : correspondance avec les applications linéaires $K^n \to K^p$.

(9) **Solutions d'un système** : $\text{Sol}(S) = f^{-1}(\{b\})$; sous-espace affine dans le cas général ; *solution particulière + solutions du système homogène.*

(10) **Opérations élémentaires** : échange, cadrage (avec $\lambda \neq 0$), remplacement. Attention aux remplacements simultanés !

(11) **Forme échelonnée réduite** : existence et unicité (si compatible) ; algorithme de Gauß.

(12) **Pivots vs variables libres** : si k pivots et n inconnues, $\text{Sol}(S_0)$ engendré par $n-k$ vecteurs.

(13) **Systèmes de Cramer** : caractérisation par l'isomorphisme f, ou par n pivots en partie gauche.

(14) **Systèmes à paramètres** : discussion selon les valeurs du paramètre.